Поиск одноцветных конфигураций

1. Докажите, что натуральный ряд можно покрасить в два цвета так, что не найдётся бесконечной одноцветной арифметической прогрессии.

2. **(а)** Вершины целочисленной решётки покрашены в 2 цвета. Докажите, что найдётся равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого параллельны осям решётки, с вершинами одного цвета.

(б) То же самое для 3 цветов.

(в) То же самое для r цветов (оцените размеры куска плоскости, который достаточно рассмотреть).

3. **(а)** Вершины целочисленной решётки покрашены в 2 цвета. Докажите, что найдётся квадрат, стороны которого параллельны осям решётки, с вершинами одного цвета.

(б) То же самое для r цветов.

Теорема Ван дер Вардена. Для любых натуральных r, k существует такое число $W(k, r)$, что при любой раскраске чисел $1, 2, \ldots, W(k, r)$ в r цветов найдётся одноцветная арифметическая прогрессия длины k.

Упрощённая теорема. При любой раскраске чисел натурального ряда в r цветов найдётся одноцветная арифметическая прогрессия длины k.

4. **(а)** **Лемма Кёнига о компактности.** Докажите, что в любом бесконечном дереве с конечными степенями вершин есть бесконечный путь.

(б) Докажите, что теорема Ван дер Вардена следует из упрощённой теоремы.

В следующих задачах можно пользоваться теоремами без доказательства.

5. Дана возрастающая последовательность натуральных чисел $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ такая, что $a_{i+1} - a_i < 2022$ для любого i. Из теоремы Ван дер Вардена выведите, что эта последовательность содержит сколь угодно длинные арифметические прогрессии.

6. Назовём множество арифметических прогрессий *последовательным*, если их длины равны, разности совпадают, а первые члены — последовательные натуральные числа. Докажите, что при любой покраске натурального ряда в 10 цветов найдутся 100 последовательных одноцветных арифметических прогрессий длины 1000.

7. Клетки бесконечной клетчатой плоскости покрашены в n цветов.

(а) Докажите, что найдутся 100 строк и 100 столбцов, на пересечении которых стоят клетки одного цвета.

(б) Докажите, что можно дополнительно ещё потребовать, чтобы все строки отстояли друг от друга на одинаковом расстоянии k, а столбцы — на одинаковом расстоянии ℓ.