Разнобой

1. Найдите все такие пары натуральных чисел (m, n), что число

$$\frac{n^3+1}{mn-1}$$

является целым.

2. Пусть $S = \{1, 2, \ldots, kn\}$, $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$ — два разбиения множества S на подмножества размера k. Докажите, что найдётся множество T из n элементов, пересекающееся с каждым из A_i и B_j ровно по одному элементу.

3. Дан такой многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$P(\sin x) = P(\cos x).$$

Докажите, что существует такой многочлен $Q \in \mathbb{R}[x]$, что

$$P(x) = Q(x^4 - x^2).$$

4. Рассмотрим конечное множество равных квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что среди любых $k+1$ квадратов найдутся 2 пересекающихся. Докажите, что это множество можно разбить не более, чем на $2k-1$ непустых подмножеств так, что в каждом подмножестве все квадраты будут иметь общую точку.

5. Найдите все многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющие следующему условию: для любых натуральных чисел u, v и простого p, таких что число $uv-1$ делится на p, число $f(u)f(v)-1$ так же делится на p.

6. Клетки таблицы 10×10 покрашены в несколько цветов так, что в каждой строке и каждом столбце не более пяти различных цветов. Каково максимальное число цветов в таблице?