Раскраска рёбер

Определение. Раскраска рёбер графа в k цветов называется *правильной*, если любые два ребра, имеющие общий конец, покрашены в разные цвета.

Определение. *Рёберное хроматическое число графа* $\chi'(G)$ — это наименьшее количество цветов, для которого существует правильная раскраска рёбер графа G.

Замечание. По сути дела $\chi'(G)$ – наименьшее число паросочетаний, на которые разбивается множество рёбер графа. Ясно, что $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$, где $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины графа G.

1. Приведите пример, когда $\chi'(G) > \Delta(G)$.
2. Пусть G — двудольный граф. Докажите, что $\chi'(G) = \Delta(G)$
   - **(а)** если G — регулярный двудольный граф;
   - **(б)** если G — произвольный двудольный граф.
3. В графе mn рёбер и несколько вершин. Известно, что рёбра можно раскрасить в m цветов правильным образом. Докажите, что это можно сделать, покрасив в каждый цвет ровно n рёбер.
4. Пусть G — двудольный граф, а минимальная степень вершины $\delta(G)$ равна d. Докажите, что существует раскраска рёбер графа G в d цветов, в которой в каждой вершине представлены все d цветов.
5. Докажите, что $\chi'(K_{2n+1}) = 2n + 1$ и $\chi'(K_{2n}) = 2n - 1$.
6. **Теорема Визинга.** Докажите, что для произвольного графа G выполнено соотношение $\chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.