Теория Рамсея

Упражнение. На олимпиаду пришли 6 человек. Докажите, что либо найдётся три человека, которые попарно друг друга знают, либо три человека, которые попарно друг друга не знают.

Определение. Пусть m, n — натуральные числа. *Числом Рамсея* $R(m, n)$ называется такое наименьшее натуральное число, что полный граф на $R(m, n)$ вершинах, рёбра которого покрашены в красный и синий цвета, обязательно содержит либо полный красный подграф на m вершинах, либо полный синий подграф на n вершинах.

Упражнение. Найдите $R(1, n)$ и $R(2, n)$.

1. Докажите, что

(а) $R(m, n) \leqslant R(m-1, n) + R(m, n-1)$;

(б) $R(m, n) \leqslant \binom{n+m-2}{n-1}$.

2. Чему равно $R(3, 4)$?

3. **(а)** Пусть всякие два человека могут либо дружить, либо враждовать либо быть незнакомыми. Докажите, что среди 17 человек всегда найдутся трое попарно дружащих, или трое попарно враждующих, или трое попарно незнакомых.

(б) Покажите, что утверждение пункта **(а)** неверно для 9 человек.

Определение. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_\ell$ — натуральные числа. *Многоцветным числом Рамсея* $R(n_1, n_2, \ldots, n_\ell)$ называется такое наименьшее натуральное число, что всякая раскраска рёбер графа с $R(n_1, n_2, \ldots, n_\ell)$ вершинами в ℓ цветов содержит полный подграф цвета i размера n_i.

Замечание. Таким образом $9 < R(3, 3, 3) \leqslant 17$.

Определение. *Мультиномиальный коэффициент* $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_\ell}$, где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_\ell$ — это количество различных разбиений n-элементного множества на ℓ подмножеств размеров $n_1, n_2, \ldots, n_\ell$.

Упражнение. Покажите, что $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_\ell} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_\ell!}$.

4. Докажите неравенство

$$R(n_1, n_2, \ldots, n_\ell) \leqslant \binom{n_1 + n_2 + \ldots + n_\ell - \ell}{n_1 - 1,\ n_2 - 1,\ \ldots,\ n_\ell - 1}.$$

5. В некотором множестве выбрали бесконечное количество конечных подмножеств одинакового размера. Докажите, что можно выбрать 2022 из них так, чтобы любые два различных пересекались по одному и тому же количеству элементов.

6. **Теорема Шура.** Натуральные числа раскрашены в k цветов. Докажите, что найдётся одноцветное решение уравнения $x + y = z$.

7. Докажите, что для любого натурального m при достаточно больших простых p существует нетривиальное решение уравнения

$$x^m + y^m \equiv z^m \mod p.$$

8. На олимпиаду пришло бесконечное количество человек. Известно, что любая тройка участников является либо хорошей, либо замечательной. Докажите, что из пришедших можно выбрать 100 участников так, чтобы все тройки были одновременно или хорошими, или замечательными.