

Комплексные числа – 2

1. Пусть $x^{2022} + y^{2022} = F(x+y, xy)$. Найти сумму коэффициентов многочлена F .
2. Пусть a, b, c, d – вещественные числа, такие, что $b - d \geq 5$ и что все корни x_1, x_2, x_3, x_4 многочлена $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ вещественные. Найти минимум выражения $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1)$.
3. Пусть $n > 3$ – натуральное число. Учитель написал на доске многочлены x^{n-3}, x^n и $x + x^{n+1}$. За один ход ученик может взять два (возможно, совпадающих) многочлена с доски и дописать на доску их сумму, разность или произведение. Для каких натуральных $n > 3$ можно за несколько действий добиться того, что на доске появится многочлен x ?
4. Пусть n – нечетное натуральное число и ε – примитивный корень степени n .
 - (а) Вычислите $(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2) \dots (1 + \varepsilon^n)$ и $(1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) \dots (1 - \varepsilon^n)$.
 - (б) Вычислите $(1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) \dots (1 - \varepsilon^{\frac{n-1}{2}})$.
5.
 - (а) При каких натуральных n многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на многочлен $x^2 + x + 1$?
 - (б) Докажите, что многочлен $x^{60} + x^{50} + x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1$ делится на многочлен $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
6. Найти все комплексные числа λ , при которых многочлен $x^3 + y^3 + z^3 + \lambda xyz$ можно разложить в произведение трех многочленов первой степени.
7. Найти все многочлены $P \in \mathbb{C}[z]$, такие, что все комплексные корни многочленов $P(z)$ и $P(z) - 1$ имеют модуль 1.
8. Докажите, что если у двух многочленов совпадают множество [комплексных] точек, в которых они принимают значение 0, и множество точек, в которых они принимают значение 1, то многочлены совпадают.