Аддитивная комбинаторика

1. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Докажите, что можно выбрать некоторые из них (хотя бы одно), и взять часть выбранных чисел с плюсом, а часть с минусом так, чтобы в сумме получилось число, делящееся на 100.

2. Сто одно натуральное число из диапазона от 1 до 10^6 покрасили в синий цвет. Докажите, что можно выбрать 100 красных чисел из этого же диапазона так, чтобы все возможные суммы красного и синего числа были попарно различными.

3. Среди натуральных чисел от 1 до 365 выбрали 29. Докажите, что среди них найдутся 4 числа таких, что $a + b = c + d$.

4. **(Теорема Коши-Дэвенпорта).** Дано два множества A и B остатков по простому модулю p. Докажите, что множество $A + B$ содержит не менее, чем $\min(p, |A| + |B| - 1)$ элементов.

   (а) Докажите теорему Коши-Дэвенпорта в случае, если $|A| + |B| - 1 > p$.

   (б) Докажите, что множество $(A \cap B) + (A \cup B)$ является подмножеством множества $A + B$.

   (в) Докажите, что если все элементы множества A «сдвинуть» на какой-то остаток c, то для полученного множества A' количество элементов в сумме $A' + B$ будет таким же, как в $A + B$.

   (г) Докажите теорему Коши-Дэвенпорта.

5. Докажите, что для любого простого числа $p > 100$ можно выбрать 5 натуральных чисел, не кратных p, сумма четвёртых степеней которых будет делиться на p.

6. Дано $2n - 1$ натуральное число. Докажите, что можно выбрать из них n так, чтобы сумма выбранных чисел делилась на n, если **(а)** n — простое, **(б)** n — натуральное.

7. Есть множество из n натуральных чисел, взаимно простых с n. Докажите, что для любого a можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была сравнима с a по модулю n.