Комплексные числа – 1

Определение. *Комплексным числом* называется выражение вида $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а $i^2 = -1$.

Геометрически комплексное число z — это точка на плоскости (или, что то же самое, вектор с началом в начале координат и концом в данной точке). *Модуль* $|z|$ комплексного числа — это длина соответствующего вектора, а *аргумент* φ — направленный угол между осью абсцисс и соответствующим вектором (по умолчанию мы считаем, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$). *Тригонометрическая форма записи комплексного числа*: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *Формула Муавра*: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Вектор, симметричный z относительно оси абсцисс, называется сопряженным с z и обозначается $\bar{z}$. Часто бывает полезно использовать равенство $|z|^2 = z\bar{z}$. В частности, если $|z| = 1$, то $\overline{z} = 1/z$.

Определение. Комплексное число z называется *корнем степени n из единицы*, если $z^n = 1$. *Примитивным корнем степени n* называется такой корень степени n из единицы, который не является корнем степени k из единицы для всех натуральных $k < n$. Стандартное обозначение: ε.

1. Известно, что $|a| = |b| = |c| = 1$. Найти $\left|\dfrac{ab + bc + ca}{a + b + c}\right|$.

2. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$ и любых комплексных чисел z_1, …, z_n с положительными вещественной и мнимой частями, справедливо неравенство

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \geqslant \frac{|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|}{\sqrt{2}}.$$

3. Докажите, что для любых комплексных чисел $z_1, \ldots, z_n$ таких, что $|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1$, можно выбрать числа $e_i \in \{\pm 1\}$, такие, что $|e_1 z_1 + \ldots + e_n z_n| \leqslant 1$.

4. Вычислить

(а) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$;

(б) $1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$;

(в) $C_{3n}^0 + C_{3n}^3 + C_{3n}^6 + C_{3n}^9 + \ldots + C_{3n}^{3n}$.

5. Докажите, что число $z = \dfrac{2+i}{2-i}$ имеет модуль 1, но не является корнем степени n из единицы ни для какого натурального n.

6. Можно ли так отметить 2022 точки на единичной окружности, чтобы все попарные расстояния между ними были рациональны?

7. **(а)** Для заданного натурального числа n запишите тригонометрические формы всех примитивных корней степени n. Сколько существует таких корней?
   (б) Вычислите сумму всех корней степени n из единицы.
   (в) Вычислите сумму всех примитивных корней степени p из единицы, где p — простое число.
   (г) Вычислите сумму всех примитивных корней степени pq из единицы, где p и q — различные простые числа.

8. Конечное множество M комплексных чисел таково, что для любого $z \in M$ и любого натурального n число $z^n \in M$. Чему может быть равна сумма всех элементов множества M?