Гамильтоновы графы

Определение. *Гамильтонов путь (цикл)* в графе — путь (цикл), проходящий через каждую вершину ровно по одному разу.

Граф называется *гамильтоновым*, если в нём существует гамильтонов цикл.

1. На какое максимальное число непересекающихся по рёбрам гамильтоновых **(а)** путей **(б)** циклов можно разбить полный граф на n вершинах?

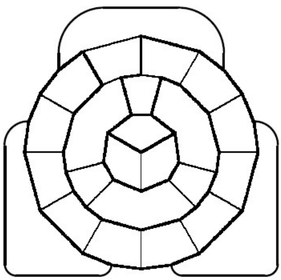
2. Докажите, что грани планарного гамильтонова графа можно покрасить в 4 цвета правильным образом.

3. В графе на $n \geqslant 3$ вершинах степень каждой вершины не меньше $\frac{n}{2}$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл. **(а)** В графе на $n \geqslant 3$ вершинах степень каждой вершины не меньше $\frac{n-1}{2}$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.

4. **(а)** В графе на $n \geqslant 3$ вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше n. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл. **(б)** В графе на $n \geqslant 3$ вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше $n-1$ Докажите, что в графе есть гамильтонов путь.

5. Дан двудольный граф, по n вершин в каждой доле. Степень каждой вершины строго больше, чем $\frac{n}{2}$. Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.

6. Есть ли в данном графе гамильтонов цикл?



7. **(а)** Докажите, что в полном ориентированном графе есть гамильтонов путь. **(б)** Докажите, что для любого n можно построить полный ориентированный граф, в котором имеется не менее $\frac{n!}{2^n}$ гамильтоновых путей.

8. Рассмотрим граф *де Брёйна*: вершинами данного графа являются последовательности из нулей и единиц длины n, а ориентированные рёбра ведут из последовательности $a_0a_1 \dots a_{n-1}$ в последовательность $a_1a_2 \dots a_n$. Докажите, что для любого n граф де Брёйна является гамильтоновым.