Раскраски графов

1. Дан граф на 1000 вершинах, степени всех вершин которого не превосходят 10. Докажите, что на его рёбрах можно расставить стрелки, чтобы каждый простой путь содержал не более 10 рёбер.

2. Вершины графа нельзя раскрасить правильным образом в d цветов. Докажите, что можно выбрать несколько вершин в этом графе, чтобы каждая из выбранных была соединена хотя бы с d из выбранных.

3. В некотором графе нет простого пути из 100 рёбер. Докажите, что его вершины можно покрасить в 100 цветов правильным образом.

4. Дан связный граф, отличный от нечётного цикла. Докажите, что существует раскраска рёбер данного графа в два цвета такая, что в каждой вершине степени больше 1 представлены оба цвета.

5. Дан связный граф. Известно, что как ни покрась его вершины в n цветов, найдется ребро с концами одного цвета. Докажите, что можно так удалить $\frac{n(n-1)}{2}$ рёбер, чтобы граф остался связным.

6. Рёбра полного графа на 101 вершине раскрашены в 25 цветов так, что нет одноцветных треугольников. Какое наибольшее количество треугольников с рёбрами трёх разных цветов может быть?

7. Назовём граф a-хорошим, если в нём нет 100 попарно соединённых вершин, и степень каждой его вершины не превосходит a. Натуральные числа $d \geqslant 100$ и k таковы, что вершины любого d-хорошего графа можно правильно окрасить в k цветов. Докажите, что вершины любого (d^2-2)-хорошего графа можно правильно окрасить в $(d-1)k$ цветов.

8. В летний лагерь приехало некоторое количество школьников, причем каждый имеет от 50 до 100 знакомых среди остальных. Докажите, что вожатый Гриша сможет раздать им шапочки 4831 цвета так, чтобы у каждого школьника среди его знакомых было не менее 20 различных цветов.