Штурм в полиномиальных неравенствах

Конструкция полной производной. Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — многочлен от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Наша цель — доказать неравенство $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ при $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$. Зафиксируем произвольную точку $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и рассмотрим сдвиг этой точки на одну и ту же величину t: $x_1 = x_1^0 + t$, $x_2 = x_2^0 + t$,…$x_n = x_n^0 + t$. Таким образом, многочлен P превращается в многочлен от одной переменной t.

Определение. Производная многочлена P по переменной t называется *полной производной* и обозначается через ΔP. Например, $\Delta(x_1) = 1$, $\Delta(x_1 x_2) = x_1 + x_2$,

$$\Delta(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1) = 2(x_1 + x_2 + x_3) - \big((x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + (x_3 + x_1)\big) = 0.$$

В общем случае $\Delta P = P_{x_1} + P_{x_2} + \ldots + P_{x_n}$, где P_{x_i} — частная производная по переменной x_i.

Если производная многочлена P как функции от t неотрицательна, то при сдвиге всех переменных на t многочлен P убывает. Значит, достаточно проверить неравенство $P \geqslant 0$ для $x_n = 0$.

Пример 1. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенство Шура
$T_{3,0,0} + T_{1,1,1} \geqslant 2T_{2,1,0}$.

Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть и обозначим ее через

$$P(x, y, z) = 2(x^3 + y^3 + z^3) - 2(x^2y + xy^2 + y^2z + zy^2 + zx^2 + xz^2) + 6xyz.$$

Тогда полная производная равна $\Delta P = 6(x^2+y^2+z^2) - 4(x^2+y^2+z^2) - 8(xy+yz+zx) + 6(xy+yz+zx) = 2(x^2+y^2+z^2-xy-yx-zx) \geqslant 0$, поэтому достаточно проверить неравенство для $z = 0$. Оно превращается в неравенство $x^3 + y^3 \geqslant x^2y + xy^2$, которое очевидно.

А как же Штурм? Предположим, что нам нужно доказать неравенство $P(x, y) \geqslant 0$, где $P(x, y) = P(y, x)$ — симметричная функция. Зафиксируем точку (x^0, y^0), где $x^0 \leqslant y^0$ и рассмотрим точки $x = x^0 + t$, $y = y^0 - t$, где $t \geqslant 0$. Мы снова получаем функцию лишь от переменной t, и на этот раз мы хотим проверить, что эта функция невозрастает. Соответствующая производная равна $\delta P = P_x - P_y$, и если $\delta P \leqslant 0$, то при сдвиге переменных P убывает, и достаточно доказать неравенство $P(s, s) \geqslant 0$, где $s = (x + y)/2$.

Пример 2. Для $n \geqslant 2$ положительных вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n$ с суммой 1 докажите, что $\left(\frac{1}{x_1^2} - 1\right)\left(\frac{1}{x_2^2} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{x_n^2} - 1\right) \geqslant (n^2 - 1)^n$.

Решение. Пусть $P(x, y) = \Big(\dfrac{1}{x^2} - 1\Big)\Big(\dfrac{1}{y^2} - 1\Big)$ и $x \leqslant y$, $x + y \leqslant 1$. Вычислим полную производную:

$$P_x - P_y = -\frac{2}{x^3}\Big(\frac{1}{y^2} - 1\Big) + \frac{2}{y^3}\Big(\frac{1}{x^2} - 1\Big) = \frac{2(y - x)(y^2 + yx + x^2 - 1)}{x^3y^3} \leqslant \frac{2(y - x)(y + x - 1)}{x^3y^3} \leqslant 0$$

(в последнем переходе мы использовали формулы $y^2 + yx = y(y + x) \leqslant y$ и $x^2 \leqslant x$), а значит, $P(x, y) \geqslant P(s, s)$, где $s = \frac{x+y}{2}$.

Таким образом, если $n = 2$, то $P(x_1, x_2) \geqslant P(s, s) = P(1/2, 1/2) = 9$, что и требовалось. Если же $n > 2$, то теперь будем сдвигать переменные s_1, s_1 и $x_3 \geqslant s_1$, прибавляя к s_1 величину t и вычитая из x_3 величину $2t$ (здесь $s_1 = (x_1 + x_2)/2$). Проверить, что при таком сдвиге значение левой части нашего неравенства не увеличивается, можно аналогичными методами: для этого достаточно посчитать производную выражения $\left(\frac{1}{s_1^2} - 1\right)\left(\frac{1}{s_1^2} - 1\right)\left(\frac{1}{x_3^2} - 1\right)$ вдоль векторного поля $v = (1, 1, -2)$, являющегося суммой векторных полей $v_1 = (1, 0, -1)$ и $v_2 = (0, 1, -1)$. Поскольку для каждого из полей v_1, v_2 производная вдоль него неположительна в соответствии с рассуждениями из предыдущего абзаца, то и производная вдоль v неположительна, что и требовалось.

Последовательно выравнивания значения переменных, в конечном счете получаем, что наименьшее значение выражения из левой части неравенства достигается, когда все x_i равны $\frac{1}{n}$. В этом случае мы получаем в точности правую часть, что и доказывает наше неравенство.

1. Докажите, что $\Delta T_{\alpha,\beta,\gamma} = \alpha T_{\alpha-1,\beta,\gamma} + \beta T_{\alpha,\beta-1,\gamma} + \gamma T_{\alpha,\beta,\gamma-1}$.

2. Для любых неотрицательных x, y, z докажите неравенство $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz + 4(x - y)(y - z)(z - x)$.

3. Сумма положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ равна 1. Докажите, что $\dfrac{(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n)}{(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n)} \geqslant \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$.

4. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенство $x^2y + y^2z + z^2x \leqslant \dfrac{4}{27}(x + y + z)^3$.

5. Про вещественные числа x, y, z известно, что $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$. Докажите неравенство $\sum_{\text{cyc}} x^3y^2 \geqslant xyz \sum_{\text{cyc}} x^2$.

6. Для неотрицательных чисел x, y, z, t докажите неравенство $2T_{4,0,0,0} + T_{1,1,1,1} \geqslant 3T_{2,2,0,0}$.

7. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенство $T_{5,0,0} - 5T_{4,1,0} + 3T_{3,2,0} + 7T_{3,1,1} - 6T_{2,2,1} \geqslant 0$.

8. **(CD-3)-теорема.** Пусть P — циклический полином степени 3 от неотрицательных переменных x, y, z. В таком случае неравенство $P(x, y, z) \geqslant 0$ справедливо тогда и только тогда, когда $P(x, x, x) \geqslant 0$ и $P(x, y, 0) \geqslant 0$.
   (а) Сначала докажите эту теорему для случая однородного полинома P.
   (б) А теперь докажите теорему для произвольного циклического полинома.

9. Для неотрицательных чисел x, y, z, не равных 0 одновременно, докажите неравенство $\sqrt{\dfrac{x}{4x + 4y + z}} + \sqrt{\dfrac{y}{4y + 4z + x}} + \sqrt{\dfrac{z}{4z + 4x + y}} \leqslant 1$.