

Признаки описанности

1. Две прямые, проходящие через точки пересечения пар противоположных сторон выпуклого четырёхугольника делят его на четыре меньших четырёхугольника. Докажите, что если какие-то два из этих четырёхугольников без общей стороны описанные, то и исходный четырёхугольник описанный.
2. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбраны точки E, F, G, H соответственно, P — точка пересечения отрезков EG и FH . Докажите, что если четырёхугольники $HAEP, EBFP, FCGP, GDHP$ описанные, то и четырёхугольник $ABCD$ тоже описанный.
3. Окружности S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1 касаются внешним образом. Докажите, что четыре общие касательные (в точках касания окружностей) либо пересекаются в одной точке, либо касаются одной окружности.
4. Окружность с центром I касается сторон BC, AC и AB неравнобедренного треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. В четырёхугольники AC_1IB_1 и CA_1IB_1 вписаны окружности ω_1 и ω_2 . Докажите, что общая внутренняя касательная к ω_1 и ω_2 , отличная от IB_1 , проходит через точку B .
5. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D . Оказалось, что AC_1DB_1 и CA_1DB_1 описанные. Докажите, что DC_1BA_1 тоже описанный.
6. Пусть M — точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC , со стороной AB, T — произвольная точка стороны BC , отличная от вершины. Докажите, что три окружности, вписанные в треугольники $BMТ, МТА, АТС$, касаются одной прямой.
7. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки P и Q . Пусть K — точка пересечения общих внешних касательных к окружностям, вписанным в треугольники ABP и CBQ . Докажите, что точка K так же является точкой пересечения общих внешних касательных для вписанных окружностей треугольников ABQ и CBP .
8. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, O — точка пересечения диагоналей AC и BD . Пусть окружности, описанные около треугольников ABO и COD , пересекаются в точке K . Точка L такова, что треугольник BLC подобен треугольнику AKD . Докажите, что если четырёхугольник $BLCK$ выпуклый, то он описанный.
9. Дана трапеция $ABCD$ с меньшим основанием BC . Точка X — точка пересечения продолжений боковых сторон. Окружность ω вписана в треугольник BXC , а окружность Ω , невписанная в треугольник AXD , касается отрезка AD . Через точки B и C провели касательные b и c к Ω , отличные от боковых сторон трапеции, а через точки A и D провели касательные a и d к ω , отличные от боковых сторон трапеции. Докажите, что в пересечении прямых a, b, c, d образуется параллелограмм.