

## Коника с алгебраическим привкусом

**Факт.** Коника задаётся уравнением  $f(x, y) = 0$ , где  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ .

1. На параболе  $y = kx^2$  выбраны различные точки  $A, B, C$  и  $D$  с абсциссами  $a, b, c, d$  соответственно. Докажите, что четырёхугольник  $ABCD$  вписанный тогда и только тогда, когда  $a + b + c + d = 0$ .
2. (а) На плоскости расположены две параболы так, что их оси взаимно перпендикулярны, а сами параболы пересекаются в четырёх точках. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.  
(б) Оси симметрии двух коник перпендикулярны, а сами коники пересекаются в четырёх точках. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.

**Факт.** Через 5 точек общего положения можно провести единственную конику.

3. Точки  $A, B, C, D$  лежат на конике, заданной уравнением  $f = 0$ . Докажите, что для некоторых  $\alpha$  и  $\beta$  выполнено равенство

$$f = \alpha \cdot \ell_{AB} \ell_{CD} + \beta \cdot \ell_{AC} \ell_{BD},$$

где  $\ell_{XY}$  — уравнение прямой  $XY$ .

4. (Теорема Паскаля) Точки  $A, B, C, D, E, F$  лежат на одной конике. Докажите, что точки пересечения пар прямых  $AB$  и  $DE, BC$  и  $EF, AF$  и  $CD$  лежат на одной прямой.
5. Пусть точки  $A, B, C, D, E$  и  $F$  лежат на одной конике.  
(а) Докажите, что прямые Паскаля шестиугольников

$$ABCDEF, ADEBCF, ADCFEB$$

пересекаются в одной точке.

- (б) Докажите, что прямые Паскаля шестиугольников

$$ABFDCE, AEFBDC, ABDFEC$$

пересекаются в одной точке.