

Конники

Определение. *Коника* — это сечение бесконечного конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса.

Оказывается, что у этих фигур есть простое плоское определение.

- *Эллипсом* с фокусами в точках F_1 и F_2 называется ГМТ X таких, что

$$F_1X + XF_2 = \text{const.}$$

- *Гиперболой* с фокусами в точках F_1 и F_2 называется ГМТ X таких, что

$$|F_1X - F_2X| = \text{const.}$$

- *Параболой* с фокусом F и директрисой ℓ называется ГМТ X , для которых FX равно расстоянию от точки X до ℓ .

Оптические свойства коник. Касательная к параболе в точке X , образует равные углы с прямой FX и осью симметрии параболы. Касательная к эллипсу (гиперболе) в точке X образует равные углы с прямыми F_1X и F_2X .

0. Докажите оптические свойства коник. *Эту задачу можно пропустить и в последующих задачах пользоваться ей без доказательства.*
1. Хорда XY проходит через фокус эллипса F_1 . Касательные в точках X и Y пересекаются в точке P . Докажите, что $PF_1 \perp XY$.
2. Касательные к эллипсу в точках X и Y пересекаются в точке P .
 - (a) Докажите, что углы F_1PX и F_2PY равны.
 - (b) Докажите, что точки F_1 и F_2 , лежащие внутри многоугольника, изогонально сопряжены относительно него тогда и только тогда, когда существует эллипс с фокусами F_1 и F_2 , вписанный в многоугольник.
3. Внутри окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $OA = OB$. Постройте на окружности точку M , для которой сумма расстояний до точек A и B наименьшая среди всех возможных.
4. (a) Фокусы эллипса проецируются на всевозможные касательные к эллипсу. Докажите, что проекции лежат на одной окружности с центром в центре эллипса.
(b) Докажите, что ГМТ таких, что эллипс из них виден под прямым углом — это окружность.

5. (a) Касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P , X' и Y' — проекции точек X и Y на директрису. Докажите, что P — центр описанной окружности треугольника $FX'Y'$.
(b) Докажите, что проекции фокуса параболы на ее касательные лежат на прямой, касающейся параболы в ее вершине.
(c) Докажите, что множество точек, из которых парабола видна под прямым углом, есть её директриса.
6. Треугольник ABC описан вокруг параболы.
 - (a) Докажите, что фокус параболы лежит на описанной окружности треугольника ABC .
 - (b) Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на директрисе параболы.

Теорема. Для любых пяти прямых общего положения существует единственная касающаяся их коника. Для любых четырёх прямых общего положения существует касающаяся их парабола.

7. Какие утверждения для четырёх прямых общего положения можно сформулировать, опираясь на теорему и предыдущую задачу?
8. Две точки A и B плоскости движутся с постоянными скоростями по двум пересекающимся прямым, причём в точку пересечения траекторий точки приезжают одновременно. Докажите, что прямая AB касается фиксированной параболы.
9. Точка X лежит вне эллипса с фокусами F_1 и F_2 . Прямые XF_1 и XF_2 пересекают эллипс в точках A, B, C, D . Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке Y . Докажите, что XY — биссектриса угла F_1XF_2 .
10. На эллипсе с фокусами F_1 и F_2 отмечена точка A . Через точку F_1 проведена хорда AB , через точку F_2 — хорда AC . Касательные к эллипсу в точках B и C пересекаются в точке P . Докажите, что описанная окружность треугольника AF_1F_2 проходит через середину отрезка AP .