

## По мотивам ММО

1. Незнайка не знает о существовании операций умножения и возведения в степень. Однако он хорошо освоил сложение, вычитание, деление и извлечение квадратного корня, а также умеет пользоваться скобками. Может ли он, используя числа 20, 2 и 2, составить выражение, значение которого больше 100?
2. Найдите наибольшее натуральное  $n$ , обладающее следующим свойством: для любого простого нечетного  $p$ , меньшего  $n$ , разность  $n - p$  также является простым числом.
3. У каждого из девяти натуральных чисел  $n, 2n, \dots, 9n$  выписали первую слева цифру. Какое наименьшее количество различных цифр могло получиться?
4. В белом клетчатом квадрате  $100 \times 100$  закрашено чёрным несколько клеток. В каждой горизонтали или вертикали, где есть чёрные клетки, их количество нечётно, так что одна из клеток — *средняя* по счёту. Все чёрные клетки, средние по горизонтали, стоят в разных вертикалях. Все чёрные клетки, средние по вертикали, стоят в разных горизонталях.
  - (a) Докажите, что найдётся клетка, средняя и по горизонтали, и по вертикали.
  - (b) Обязательно ли каждая клетка, средняя по горизонтали, средняя и по вертикали?
5. Верно ли, что из любого выпуклого четырехугольника можно вырезать три уменьшенные вдвое копии этого четырехугольника?
6. По доске  $n \times n$  прошла ладья, побывав в каждой клетке один раз, причем каждый её ход был ровно на одну клетку. Клетки занумерованы числами от 1 до  $n^2$  в порядке прохождения ладьи. Пусть  $M$  — максимальная разность между номерами соседних по стороне клеток. Каково наименьшее возможное значение  $M$ ?
7. Даны выпуклый многоугольник  $M$  и простое число  $p$ . Оказалось, что существует ровно  $p$  способов разбить  $M$  на равносторонние треугольники со стороной 1 и квадраты со стороной 1. Докажите, что длина одной из сторон многоугольника  $M$  равна  $p - 1$ .