

ММО. Комбинаторная геометрия

1. Будем называть *змейкой* ломаную, у которой все углы между соседними звеньями равны, причем для любого некрайнего звена соседние с ним звенья лежат в разных полуплоскостях от этого звена. Барон Мюнхгаузен заявил, что отметил на плоскости 6 точек и нашел 6 разных способов соединить их (пятизвенной) змейкой (вершины каждой из змеек — отмеченные точки). Могут ли его слова быть правдой?
2. Дан треугольник, у которого нет равных углов. Петя и Вася играют в такую игру: за один ход Петя отмечает точку на плоскости, а Вася красит ее по своему выбору в красный или синий цвет. Петя выигрывает, если какие-то три из отмеченных им и покрашенных Васей точек образуют одноцветный треугольник, подобный исходному. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть (каков бы ни был исходный треугольник)?
3. Назовем точку на плоскости *узлом*, если обе ее координаты — целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что среди узлов внутри треугольника можно выбрать такие два узла, что проходящая через них прямая содержит одну из вершин треугольника или параллельна одной из сторон треугольника.
4. Клетки бесконечного клетчатого листа бумаги раскрасили в черный и белый цвета в шахматном порядке. Пусть X — треугольник площади S с вершинами в узлах сетки. Покажите, что есть такой подобный X треугольник с вершинами в узлах сетки, что площадь его белой части равна площади черной части и равна S .