

## ТЧ с комбинаторным привкусом

1. На доске написано 10 натуральных чисел. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько чисел и расставить между ними знаки «+» и «-» так, чтобы полученная в результате сумма делилась на 1001.
2. (a) На доске написано  $n$  целых чисел. Докажите, что среди них найдутся несколько, сумма которых кратна  $n$ .  
(b) То же самое, но на доске  $n - 1$  целое число, не все из них имеют одинаковые остатки при делении на  $n$ .
3. Из чисел от 1 до  $2n$  выбрано  $n + 1$  число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.
4. Докажите, что для любого простого  $p$  существуют такие натуральные  $x$  и  $y$  такие, что  $1 + x^2 + y^2 \div p$ .
5. Докажите, что найдётся число, представимое в виде суммы квадратов четырёх чисел более чем миллионом различных способов.
6. Дана строчка из 25 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $:$  и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, равное 0? Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя.
7. Дано натуральное число  $n$ . Рассмотрим множество всех целых чисел, по модулю не превосходящих  $n$ . Какое наибольшее число элементов можно выбрать из этого множества так, чтобы не нашлось трех различных выбранных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ , для которых  $a + b = c$ ?
8. Пусть  $p$  — нечетное простое число. Найдите число подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, p\}$ , сумма элементов которых делится на  $2p$ .