Симметрия и перенос

1. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую деревни A и B, чтобы путь $AMNB$ из A в B был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам.)

2. В точке A стоит пионер Петя с ведром. В точке B горит костер. Петя хочет добежать до реки, набрать воды, подбежать к костру и затушить его. В какую точку берега ему стоит бежать? (Берег реки — прямая, точки A и B лежат по одну сторону от нее).

3. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M внутри него. Через точки A, B, C и D проведены прямые параллельные MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что полученные прямые пересекаются в одной точке.

4. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, докажите что радиусы описанных окружностей треугольников ABC, ABH, BCH, CAH равны.

5. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P так, что $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

6. Дана окружность с центром в O. Дана прямая l, проходящая через O и точка C на прямой l внутри окружности. Точки A и A_1 взяты на окружности в одной полуплоскости относительно OC так, что AC и A_1C образуют одинаковый угол с прямой l. Отрезок AA_1 продлили до пересечения с прямой l — получили точку B. Докажите, что положение точки B не зависит от положения точки A.

7. Дан равнобедренный треугольник ABC с $\angle C = 120^\circ$. Из вершины C выпущены два луча в сторону AB — угол между лучами 60° —, которые, отразившись от нее в точках M и N, пересекают стороны AC и BC соответственно в точках A_1 и B_1. Докажите, что площадь CMN совпадает с суммой площадей AA_1M и BB_1N.

8. Треугольники ABC и AA_1B_1 подобны. Точка A_1 лежит на продолжении BC за точку C. Дано $\angle B = \angle B_1 = 90^\circ$; треугольники не накладываются друг на друга. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AA_1C лежит на прямой A_1B_1.

9. В данный остроугольный треугольник впишите треугольник наименьшего периметра.