

Тренировочный вариант

1. Существуют ли восемь натуральных чисел, среди которых ровно одно делится на 8, ровно два делятся на 7, ровно три — на 6, ..., ровно семь — на 2?
2. Дан треугольник ABC с тупым углом B . Касательные к его описанной окружности, проведенные в точках A и B , пересекаются в точке P . Прямая, проходящая через точку B перпендикулярно стороне BC , пересекает сторону AC в точке K . Докажите, что $PA = PK$.
3. Для действительных x, y, z из отрезка $[0; 1]$ докажите неравенство

$$\frac{x}{7 + y^3 + z^3} + \frac{y}{7 + x^3 + z^3} + \frac{z}{7 + x^3 + y^3} \leq \frac{1}{3}.$$

4. На встречу выпускников пришло 45 человек. Оказалось, что любые двое из них, имеющие одинаковое число знакомых среди пришедших, не знакомы друг с другом. Какое наибольшее число пар знакомых могло быть среди участвовавших во встрече?
5. Для некоторого многочлена существует бесконечное множество его значений, каждое из которых многочлен принимает по крайней мере в двух целочисленных точках. Докажите, что существует не более одного значения, которое многочлен принимает ровно в одной целой точке.