Многочлены

1. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два корня. Оказалось, что для любых действительных a и b выполнено неравенство $f(a^2+b^2) \geqslant f(2ab)$. Докажите, что хотя бы один из корней квадратного трёхчлена отрицательный.

2. На координатной плоскости нарисованы четыре графика функций вида $y = x^2 + ax + b$, где a, b — числовые коэффициенты. Известно, что есть ровно четыре точки пересечения, причём в каждой пересекаются ровно два графика. Докажите, что сумма наибольшей и наименьшей из абсцисс точек пересечения равна сумме двух других абсцисс.

3. Существует ли многочлен 2022 степени $P(x)$ такой, что $P(x^2-1)$ делится на $P(x)$?

4. Про многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами известно, что

$$P(1) = 1,\ P(2) = 8,\ P(3) = 27,\ P(5) = 125,\ P(6) = 216,\ P(7) = 343.$$

Какое наименьшее возможное значение может принимать $|P(4)|$?

5. Существуют ли такие четыре многочлена, что сумма любых трёх из них имеет хотя бы один корень, а сумма любых двух не имеет корней?

6. На графике функции $y = x^2$ выбраны четыре различные точки, лежащие на одной окружности. На графике функции $y = 2022x^2$ выбраны точки с такими же абсциссами. Докажите, что они тоже лежат на одной окружности.

7. Про числа a, b, c, d известно, что

$$a = \sqrt{4-\sqrt{5-a}},\ b = \sqrt{4+\sqrt{5-b}},\ c = \sqrt{4-\sqrt{5+c}},\ d = \sqrt{4+\sqrt{5+d}}.$$

Чему равно произведение $abcd$?

8. Докажите, что не существует многочлена от двух переменных $P(x,y)$, для которого множеством решений неравенства $P(x,y) > 0$ является квадрант $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$.