

Принцип крайнего

- 1° *Максимум или минимум.* На листке написаны несколько натуральных чисел. Известно, что для любых двух найдется на листке число, которое на каждое из них делится. Докажите, что на листке найдется число, которое делится на все числа.
- 2° *Первое или последнее.* Петя разложил 10 фруктов на две чаши весов. Далее он 7 раз сделал такую операцию: поменял два фрукта с правой чаши с одним фруктом с левой. Могли ли весы быть в равновесии вначале и после каждой операции?
- 3° *Общий делитель.* Пусть $x^3 + x = 5$. Докажите, что x — иррационально.
4. В порядке возрастания длин лежат несколько палочек. Можно взять любые три и проверить, складывается ли из них треугольник. За какое наименьшее число проверок можно доказать или опровергнуть утверждение о том, что из любой тройки палочек складывается треугольник?
5. Юра, Андрей и Витя сидят по кругу за столом и едят орехи. Сначала все орехи у Юры. Он делит их поровну между Андреем и Витей, а остаток (если он есть) съедает. Затем все повторяется: каждый следующий (по часовой стрелке) делит имеющиеся у него орехи поровну между соседями, а остаток съедает. Вначале было больше 100 орехов. Докажите, что хотя бы один орех *не* будет съеден.
6. Пусть $2^x = 10$. Докажите, что x — иррационально.
7. На доске выписано 100 целых чисел. Известно, что для любых пяти из этих чисел найдутся такие шесть из этих чисел, что равны средние арифметические этой пятерки и этой шестерки. Докажите, что все числа равны.
8. За день в библиотеке побывало 100 читателей, каждый по разу. Оказалось, что из любых трех по крайней мере двое там встретились. Докажите, что библиотекарь мог сделать важное объявление в такие два момента времени, чтобы все 100 читателей его услышали.
9. На каждой клетке шахматной доски вначале стоит по ладье. Каждым ходом можно снять с доски ладью, которая бьет нечетное число ладей. Какое наибольшее число ладей можно снять? (Лады бьют друг друга, если они стоят на одной вертикали или горизонтали и между ними нет других ладей).