Радикальные оси

Геометрическим местом точек, имеющих одинаковые степени относительно неконцентрических окружностей, является прямая, перпендикулярная линии центров окружностей. Эта прямая называется *радикальной осью* окружностей. Радикальные оси трёх окружностей, чьи центры не лежат на одной прямой, пересекаются в одной точке. Эта точка называется *радикальным центом* трёх окружностей.

С помощью радикальных очей можно доказывать следующие типы утверждений.

- То, что три точки лежат на одной прямой, можно доказать, найдя две окружности, относительно которых каждая из данных точек имеет одинаковую степень.
- То, что три прямые пересекаются в одной точке, можно доказать, приведя три окружности, для которых эти прямые являются радикальными осями.
- Также то, что три точки лежат на одной прямой, можно доказать, если обнаружить три окружности с центрами в этих точках, имеющие общую радикальную ось.
- Перпендикулярность двух прямых можно продемонстрировать, найдя две окружности такие, что одна из прямых — это линия их центров, а другая — радикальная ось.

1. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

2. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. На стороне BC выбрана произвольная точка X. Описанные окружности треугольников XCB_1 и XBC_1 повторно пересекаются в точке Y. Докажите, что четырёхугольник $XYHA_1$ вписанный.

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в двух точках на прямой ℓ, как и окружности ω_3 и ω_4. Докажите, что точки пересечения пар окружностей ω_1 и ω_3, ω_2 и ω_4 лежат на одной окружности или прямой.

4. Внутри треугольника ABC с описанной окружностью ω отметили точку P, отличную от ортоцентра треугольника. Точки A_1, B_1, C_1 — основания высот треугольника ABC, A_2, B_2, C_2 — точки пересечения AP, BP, CP с ω. Докажите, что описанные окружности треугольников AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 имеют общую точку.

5. Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 проходят через точку A. Известно, что прямая, содержащая общую хорду ω_1 и ω_2, проходит через центр ω_3, а прямая, содержащая общую хорду ω_2 и ω_3, — через центр ω_1. Докажите, что прямая, содержащая общую хорду ω_1 и ω_3, проходит через центр ω_2.

6. **(a)** На прямых, содержащих стороны AB и AC треугольника ABC, выбраны точки C_1 и B_1 соответственно. Докажите, что ортоцентр имеет одинаковую степень относительно окружностей, построенных на BB_1 и CC_1 как на диаметрах.
(b) Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке F, а сторон BC и AD — в точке E. Докажите, что середины отрезков AC, BD, EF лежат на одной прямой (*прямая Гаусса*), ортоцентры треугольников ABE, CDE, ADF, BCF лежат на одной прямой (*прямая Обера*), причём эти прямые перпендикулярны.

7. Через ортоцентр треугольника провели три полуокружности с центрами в серединах сторон. Докажите, что шесть концов полуокружностей лежат на одной окружности.

8. На сторонах треугольника ABC взято по две точки так, что шесть отрезков, соединяющих вершину с точкой на противолежащей стороне, равны. Докажите, что середины этих отрезков лежат на одной окружности.