

Радикальные оси

1. Одна окружность проходит через вершины A и C прямоугольника $ABCD$, а другая — через вершины B и D . Докажите, что их общая хорда проходит через центр прямоугольника.
2. На окружности с центром O отмечены точки A и B . Две другие окружности лежат внутри данной, касаются её в точках A и B , а также касаются друг друга в точке M . Найдите геометрическое место точек M .
3. С помощью циркуля и линейки постройте радикальную ось двух данных окружностей.
4. Дана неравнобедренная трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Окружность, проходящая через точки A и B , пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q , а диагонали — в точках M и N . Докажите, что прямые PQ , MN и CD пересекаются в одной точке.
5. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q . Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на прямой PQ .
6. На плоскости даны окружность ω , точка A , лежащая внутри ω и точка B ($B \neq A$). Рассматриваются всевозможные треугольники BXY такие, что точки X и Y лежат на ω , и хорда XY проходит через точку A . Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY , лежат на одной прямой.
7. (Теорема Брианшона). Докажите, что диагонали AD , BE и CF описанного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в одной точке.