

Степень точки

Определение. Пусть дана окружность ω с центром O и радиусом R . Степень точки X относительно ω — это число $OX^2 - R^2$. Обозначение: $\text{Pow}_\omega X$.

Утверждение. Пусть прямая, проходящая через точку X , пересекает окружность в точках A и B . Тогда $\text{Pow}_\omega X = \pm XA \cdot XB$, где знак «+» берётся, если X лежит вне ω , а знак «-» в противном случае. Если X лежит вне ω , то в предельном случае получается, что $\text{Pow}_\omega X$ равна квадрату длины касательной, проведённой из X .

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Описанные окружности треугольников ABD и ACD пересекают отрезки AC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что $BF = CE$.
2. К окружности с центром в точке O из точки P проведены касательные PA и PB . Отрезки PO и AB пересекаются в точке M . Произвольная секущая, проведённая через точку P , пересекает окружность в точках C и D . Докажите, что точки C, D, M, O лежат на одной окружности.
3. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Перпендикуляр, проведённый в точке I к прямой AI , пересекает прямую BC в точке M . D — основание перпендикуляра из точки I на прямую AM . Докажите, что точка D лежит на описанной окружности треугольника ABC .
4. Окружность пересекает каждую сторону ромба в двух точках и делит её на три отрезка. Обойдём контур ромба по часовой стрелке, начав с какой-нибудь вершины, и покрасим три отрезка на каждой стороне ромба последовательно в белый, синий и красный цвета. Докажите, что сумма длин белых отрезков равна сумме длин красных отрезков.
5. В треугольнике ABC угол A наименьший. На сторонах AB и AC отмечены такие точки D и E , что $\angle BAC = \angle BCD = \angle CBE$. Докажите, что середины отрезков AB, AC, BE, CD лежат на одной окружности.
6. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка X симметрична A относительно прямой B_1C_1 . Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что точки H, A_1, X, O лежат на одной окружности.
7. Противоположные стороны четырёхугольника, вписанного в окружность, пересекаются в точках P и Q . Найдите PQ , если касательные к окружности, проведённые из точек P и Q , равны a и b .
8. В остроугольном треугольнике ABC точки O, I, I_a являются центрами описанной, вписанной и внеписанной со стороны BC окружностей. Точка A' симметрична A относительно прямой BC . Докажите, что $\angle IOI_a = \angle IA'I_a$.