Степень точки

Определение. Пусть дана окружность ω с центром O и радиусом R. *Степень точки X относительно ω* — это число $OX^2 - R^2$. Обозначение: $\operatorname{Pow}_\omega X$.

Утверждение. Пусть прямая, проходящая через точку X, пересекает окружность в точках A и B. Тогда $\operatorname{Pow}_\omega X = \pm XA \cdot XB$, где знак «$+$» берётся, если X лежит вне ω, а знак «$-$» в противном случае. Если X лежит вне ω, то в предельном случае получается, что $\operatorname{Pow}_\omega X$ равна квадрату длины касательной, проведённой из X.

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Описанные окружности треугольников ABD и ACD пересекают отрезки AC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что $BF = CE$.

2. К окружности с центром в точке O из точки P проведены касательные PA и PB. Отрезки PO и AB пересекаются в точке M. Произвольная секущая, проведённая через точку P, пересекает окружность в точках C и D. Докажите, что точки C, D, M, O лежат на одной окружности.

3. В угол вписаны окружности ω_1 и ω_2. Первая из них касается сторон угла в точках A и B, а вторая — в точках C и D. Докажите, что прямая AD высекает на этих окружностях равные хорды.

4. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности ω, касательные к которой в точках B и C пересекаются в точке P. Медиана треугольника, проведённая из вершины A, пересекает ω в точке Q. Докажите, что точки A, O, P и Q лежат на одной окружности.

5. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Перпендикуляр, проведённый в точке I к прямой AI, пересекает прямую BC в точке M. D — основание перпендикуляра из точки I на прямую AM. Докажите, что точка D лежит на описанной окружности треугольника ABC.

6. В треугольнике ABC угол A наименьший. На сторонах AB и AC отмечены такие точки D и E, что $\angle BAC = \angle BCD = \angle CBE$. Докажите, что середины отрезков AB, AC, BE, CD лежат на одной окружности.

7. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка X симметрична A относительно прямой B_1C_1. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки H, A_1, X, O лежат на одной окружности.

8. В остроугольном треугольнике ABC точки O, I, I_a являются центрами описанной, вписанной и вневписанной со стороны BC окружностей. Точка A' симметрична A относительно прямой BC. Докажите, что $\angle IOI_a = \angle IA'I_a$.