

Целая и дробная части

Определение. Целая часть $[x]$ числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x . Дробная часть $\{x\}$ числа x — это разность самого числа и его целой части.

1. Действительные числа x, y, z, t таковы, что

$$\{x + y + z\} = \{x + y + t\} = \{x + z + t\} = \{y + z + t\} = \frac{1}{4}.$$

Чему может быть равно $\{x + y + z + t\}$?

2. На какие цифры может оканчиваться число $[x] + [3x] + [6x]$ при положительных x ?
3. Существует ли действительное x такое, что $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$?
4. Найдите все натуральные n такие, что число $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ является простым.
5. Докажите, что для натурального n выполнено равенство

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right].$$

6. Докажите, что для любого натурального n число $\left[(2 + \sqrt{3})^n\right]$ является нечётным.
7. Может ли уравнение $[x^2] + px + q = 0$ при $p \neq 0$ иметь более 100 корней?
8. Какие значения может принимать значение выражения $[x] \cdot \left[\frac{2000}{x}\right]$ при положительных x ?
9. Числовая последовательность задана условиями: $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \left[\sqrt{a_n}\right]$. Докажите, что среди членов последовательности бесконечно много квадратов.