

## Зри в корень!

1. (*Шутка*). Найдите все такие пары чисел  $p$  и  $q$ , что оба они являются корнями трехчлена  $x^2 + px + q$ .
2. Известно, что  $(a + b + c)c < 0$ . Докажите, что  $b^2 > 4ac$ .
3. Существуют ли такие 100 квадратных трёхчленов, что каждый из них имеет два корня, а сумма любых двух из них корней не имеет?
4. Дан многочлен нечетной степени  $P(x)$ . Докажите, что у уравнения  $P(P(x)) = 0$  различных корней не меньше, чем у уравнения  $P(x) = 0$ .
5. Пусть  $f(x)$  — некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться, что уравнение  $f(x) = a$  при любом значении  $a$  имеет четное число решений?
6. Даны многочлен  $P(X)$  и такие числа  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ , что  $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ . Оказалось, что

$$P(a_1 x + b_1) + P(a_2 x + b_2) = P(a_3 x + b_3)$$

для любого действительного  $x$ . Докажите, что  $P(x)$  имеет хотя бы один действительный корень.

7. Многочлен

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + 1$$

с неотрицательными коэффициентами имеет  $n$  действительных корней. Доказать, что  $P(2) \geq 3^n$ .