Инвариант

1. На хоккейной площадке лежит три шайбы, пронумерованные числами 1, 2, 3. Хоккеист Вася выбирает какую-то из них и бьет по ней так, что она пролетает между двумя другими. Он делает такие удары снова и снова. Может ли так оказаться, что после 2013 ударов каждая шайба лежит на своем первоначальном месте?

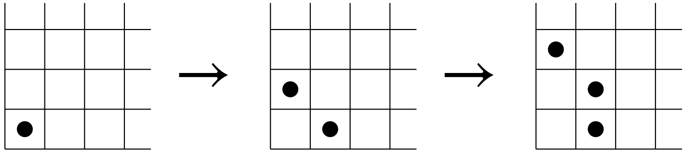
2. На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидели 44 веселых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в разных направлениях (один - по часовой стрелке, другой - против). Докажите, что чижи не смогут собраться на одном дереве.

3. Имеется коробка с прямоугольным дном и набор плиток, которыми можно замостить дно коробки. Каждая плитка имеет размер либо 1×4, либо 2×2. Петя Торт заменил одну плитку 1×4 на плитку 2×2. Могло ли оказаться, что новым набором плиток снова можно замостить дно коробки?

4. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}$. Выбираем из написанных на доске два произвольных числа a и b, стираем их и пишем на доску число $a + b + ab$. Такую операцию проделываем 99 раз, пока не останется одно число. Какие числа мы можем получить?

5. В таблице 8×8 все четыре угловые клетки закрашены чёрным цветом, все остальные — белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

6. Имеется бесконечная вправо и вверх клетчатая доска. В углу доски стоит фишка. Разрешается следующая операция: если справа и сверху от некоторой фишки стоят пустые клетки, то такую фишку можно убрать и поставить две новые фишки в клетки справа и сверху. (См. пример на рисунке рис.)



Можно ли за несколько таких операций сделать так, что в левом нижнем квадрате 3×3 не останется ни одной фишки?