

## Неоднородность

**Пример.** Существуют ли 2021 различное натуральное число, произведение любых двух из которых делится сумму всех чисел?

*Решение.* Возьмём произвольные натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ . Если условие выполнилось, то отлично, в противном случае нам нужно как-то поправить наши числа. Давайте домножим все числа на некоторое  $k$ . Тогда необходимо, чтобы  $k^2 a_i a_j$  делилось на

$$ka_1 + ka_2 + \dots + ka_{2021} = k(a_1 + a_2 + \dots + a_{2021}).$$

Видно, что если в качестве  $k$  взять  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2021}$ , то это действительно будет верно.

Основная идея сегодняшнего занятия примерно в этом — выбрать произвольный пример, а потом его исправить, домножив на какое-нибудь число.

1. Существует ли арифметическая прогрессия из 2021 члена с ненулевой разностью такая, что каждый её член имеет вид  $\frac{1}{n}$  для некоторого натурального  $n$ ?
2. Существуют ли 2021 различное натуральное число, произведение любых двух из которых делится на их сумму?
3. Существуют ли различные натуральные числа  $a, b, c$ , большие миллиарда, такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 2021?
4. (а) Существуют ли натуральные  $a, b, c$  такие, что

$$a^{2019} + b^{2020} = c^{2021} ?$$

- (б) Существуют ли натуральные  $a, b, c$  (причём  $a$  — нечётное) такие, что

$$a^{2021} + b^{2021} = c^{2022} ?$$

5. Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 2021$ . Обязательно ли число  $abc$  является (а) точным квадратом; (б) точным кубом?
6. Дано натуральное число  $n$ . Существуют ли  $n$  различных натуральных чисел таких, что их сумма является точной 2020-й степенью, а их произведение — точной 2021-й степенью?
7. Пусть  $D(n)$  – количество различных простых делителей натурального числа  $n$ . Конечно или бесконечно число пар различных натуральных чисел  $a$  и  $b$  таких, что  $D(a+b) = D(a) + D(b) > 10^{100}$ ?
8. Существуют ли натуральные числа  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2021}$  такие, что

$$\text{НОК}(a_1, a_2) > \text{НОК}(a_2, a_3) > \dots > \text{НОК}(a_{2020}, a_{2021})?$$