# Китайская теорема об остатках

**Китайская теорема об остатках.**

*Предположим, что набор чисел* $m_1, m_2, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ *удовлетворяет условию* $(m_i, m_j) = 1\ \forall i \neq j$. *Тогда для любых* $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ *система* $(*)$ *имеет единственное решение* $\mod m_1, m_2 \cdots m_r$.

$$(*)\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1}; \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2}; \\ \ \vdots \\ x \equiv a_r \pmod{m_r}. \end{cases}$$

**1.** При каких целых $n$ число $a_n = n^2 + 3n + 1$ делится на 55?

**2.** Юлик собрал мешочек монет. Вика пересчитала их, и оказалось, что если разделить все монеты на пять равных кучек, то останется две лишние монеты. А если на четыре равные кучки — останется одна лишняя монета. В то же время монетки можно разделить на три равные кучки. Какое наименьшее число монет могло быть у Юлика?

**3.** Докажите, что какое бы ни было $N \in \mathbb{N}$ найдутся $N$ подряд идущих натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_N$, таких что $a_1 \vdots p_1^{2021}, a_2 \vdots p_2^{2021}, \ldots, a_N \vdots p_N^{2021}$, где $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ..., $p_N$ — первые $N$ простых чисел.

**4.** Трехзначное число 625 обладает интересным свойством:

$$625^2 = 390\,625 \equiv 625 \pmod{1000}.$$

Сколько четырехзначных чисел удовлетворяют сравнению

$$x^2 \equiv x \pmod{10000}?$$

**5.** Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре (конечно, в каре должно быть более одного человека), но он не знает сколько солдат (от 1 до 37) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение. Например, войско из 9 человек можно поставить в виде квадрата $3 \times 3$, а если один человек болен, то в виде двух квадратов $2 \times 2$.

**6.** При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1, \ldots, b_n$ (не все из которых равны), что при всех натуральных $k$ число $(b_1 + k)(b_2 + k) \ldots (b_n + k)$ является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от $k$, но должен быть больше 1.)