Правильный многоугольник и векторы

Из того, что вы, возможно, не помните, в листочке понадобится линейность скалярного произведения векторов, а именно

$$(\vec{u}, \vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w}).$$

В частности, это позволяет считать квадрат длина отрезка:

$$|\vec{u}|^2 = (\vec{u}, \vec{u}) = (\vec{v}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{w}) = |\vec{v}|^2 + 2(\vec{v}, \vec{w}) + |\vec{w}|^2.$$

1. **(a)** Дан правильный n-угольник $A_1A_2\dots A_n$ с центром в точке O. Докажите, что

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

(b) Пусть X — произвольная точка плоскости. Чему равна сумма

$$\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XA_2} + \dots + \overrightarrow{XA_n}\,?$$

2. Найдите значение выражения
(a) $\sin 9^\circ + \sin 49^\circ + \dots + \sin 329^\circ$; **(b)** $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$.

3. Дан правильный многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ с центром в точке O и произвольная точка X.
(a) Докажите, что проекции точки X на прямые OA_1, OA_2, ..., OA_n расположены в вершинах правильного многоугольника. Сколько углов у этого многоугольника?
(b) Точки $H_1, H_2, \dots, H_n$ — проекции X на стороны правильного n-угольника (или на их продолжения). Докажите, что

$$\overrightarrow{XH_1} + \overrightarrow{XH_2} + \dots + \overrightarrow{XH_n} = \frac{n}{2}\overrightarrow{XO},$$

где O — центр n-угольника.

4. Внутри правильного n-угольника взята точка X, проекции которой на все стороны попадают во внутренние точки сторон. Этими точками стороны разделяются на $2n$ отрезков. Покрасим эти отрезки в шахматном порядке в красный и синий цвета.
(a) Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих отрезков.
(b) Докажите, что сумма площадей треугольников с вершиной в точке X и основанием в красных отрезках равна сумме площадей аналогичных синих треугольников.

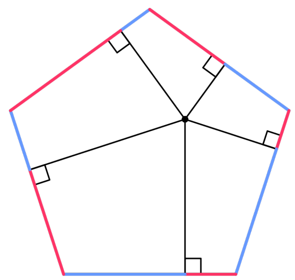

Рис. 1: к задаче 4a

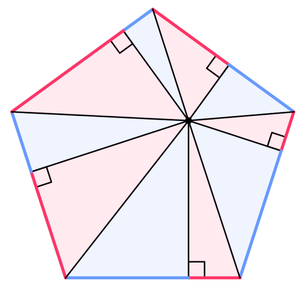

Рис. 2: к задаче 4b

5. **(a)** Правильный n-угольник $A_1A_2\dots A_n$ вписан в окружность с центром O и радиусом R, X — произвольная точка. Докажите, что

$$XA_1^2 + XA_2^2 + \dots + XA_n^2 = n(R^2 + OX^2).$$

(b) Найдите сумму квадратов расстояний от вершин правильного n-угольник вписанного в окружность радиусом R, до произвольной прямой, проходящей через центр многоугольника.

6. В правильный n-угольник вписана окружность с центром в точке O и радиусом r, X — произвольная точка. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки X до прямых, содержащих стороны n-угольника, равна $n(r^2 + OX^2/2)$.

7. Докажите, что если число n не является степенью простого числа, то существует выпуклый n-угольник со сторонами длиной 1, 2, ..., n, все углы которого равны.