

Диагональ клетчатого многоугольника

1. В клетчатом многоугольнике $m \times n$ провели диагональ.
 - (a) Сколько узлов лежит на ней (включая концы)?
 - (b) На сколько частей она делится линиями сетки?
 - (c) Чему равна длина минимального отрезка в разбиении диагонали линиями сетки?
2. (a) В квадратном бильярде со стороной 1, в углах которого находятся лузы, из левого нижнего угла выпустили шар. Сначала он ударился о правую стенку на высоте r . Шар продолжает летать, отражаясь от стенок по закону «угол падения» равен «углу отражения», пока не попадет в лузу. При каких r шар попадет в лузу?
(b) В прямоугольном бильярде размером $p \times 2q$, где p и q — нечётные числа, сделаны лузы в каждом углу и в середине каждой стороны длины $2q$. Из угла выпущен шарик под углом 45° к стороне. Докажите, что шарик обязательно попадёт в одну из средних луз.

3. Натуральные числа m и n взаимно просты. Отрезок $[0, 1]$ разбит на $m + n$ равных отрезков. Докажите, что в каждом отрезке, кроме двух крайних, лежит ровно одна из точек

$$\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}.$$

4. Прямоугольник $m \times n$, где m, n — натуральные взаимно простые числа, $m < n$, разбит на единичные квадратики. Из левого нижнего угла прямоугольника в его правый верхний угол проведена диагональ. Она отсекает треугольники от некоторых квадратиков. Найдите суммарный периметр всех этих треугольников.
5. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо m , либо n человек, причём m и n взаимно просты. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?
6. Даны нечетные взаимно простые числа m и n . На отрезке длины 1 отметили точки, делящие его на m равных отрезков, а также точки, делящие его на n равных отрезков. Части, на которые эти точки разбили отрезок, покрасили в красный и синий цвета в шахматном порядке. Докажите, что разность сумм длин красных отрезков и длин синих отрезков равна $\frac{1}{mn}$.