

Подсчет углов

1. AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC . Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику A_1B_1C .
2. Две окружности пересекаются в точках A и B . Продолжения хорд AC и BD первой окружности пересекают вторую окружность в точках E и F соответственно. Докажите, что прямые CD и EF параллельны.
3. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BKC = \gamma$, где K — точка пересечения диагоналей. Найдите угол ACD .
4. В неравностороннем треугольнике ABC проведена высота из вершины A и биссектриса из двух других вершин. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного этими тремя прямыми, касается биссектрисы, проведенной из вершины A .
5. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N . Пусть P — точка пересечения прямой MN и биссектрисы угла B . Докажите, что $\angle BPC = 90^\circ$.
6. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D , E и F так, что $DE = BE$, $FE = CE$. Докажите, что центр описанной около треугольника ADF окружности лежит на биссектрисе угла DEF .
7. *Лемма о трезубце*
 - (a) Докажите, что середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC , не содержащей точку A , равноудалена от точек B , C , центра вписанной окружности и центра невписанной окружности, касающейся стороны BC .
 - (b) Докажите, что середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC , содержащей точку A , равноудалена от точек B , C и двух центров невписанных окружностей, касающихся сторон AB и AC .
8. *Треугольник Наполеона*. На сторонах произвольного остроугольного треугольника внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.