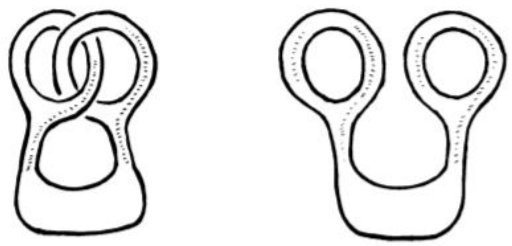
Первые шаги в топологии

1. Деформации

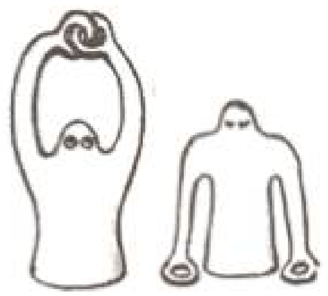
Начнем знакомство с топологией с так называемых деформаций эластичных тел. Тела трехмерны и эластичны — можно растягивать, сжимать и т.д., но нельзя разрывать или склеивать: можно представлять себе прочную эластичную резину или же кусок неклейкого пластилина.

1. Докажите, что эластичное тело, изображенное на рисунке а), можно продеформировать в тело на рисунке б).

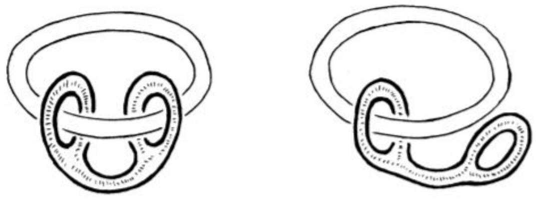


(а) (б)

А вот та же самая задача с немного другой картинкой — эластичный человек хочет расцепить пальцы, не разжимая их.

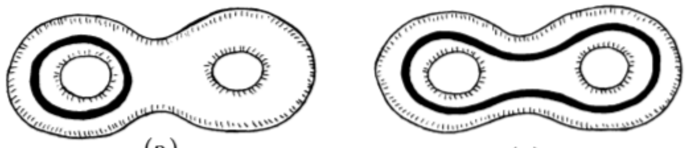


2. Потренируемся еще - теперь хотим снять одну из ручек эластичного кренделя с эластичного бублика.



(а) (б)

3. На эластичном кренделе нарисована окружность, как показана на рисунке. Продеформируйте крендель так, чтобы окружность окружала обе дырки.



(а) (б)

4. Можно ли продеформировать «бублик» в «шар»?
Подсказка: попробуйте, как и в прошлой задаче, что-нибудь на фигурах нарисовать.

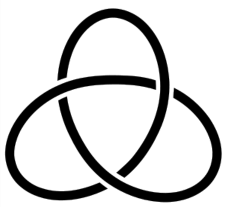
Определение (почти). Два тела называются *изотопными*, если одно можно деформировать в другое.

Дальше нас всегда будут интересовать тела с точностью до изотопности (изотопные считаем «одинаковыми»).

2. Узлы

Перейдем к тому, зачем это затевалось — к узлам. Под *узлом* будем понимать эластичную веревку, концы которой соединены. Есть совсем простой *тривиальный узел* — «окружность» в пространстве, однако не любой узел можно деформациями привести к такому, то есть распутать.

Пример узла, который нельзя распутать, представлен на рисунке ниже. Этот узел носит специальное название — *трилистник*.



Не секрет, что, деформируя узел, его можно довольно сильно запутать (наверняка, если вы когда-нибудь распутывали какую-нибудь цепочку или даже провод от наушников — уже испытывали проблемы).

Например...

5. Докажите, что все узлы ниже изотопны трилистнику.

Впрочем, очень хотелось бы понимать — а сколько вообще существует различных узлов? Как их можно классифицировать? Как понимать, перед нами вообще различные узлы или одинаковые (изотопные)?

Постараемся ответить хотя бы частично на последний вопрос. Придумаем критерий, по которому можем определить, что данные два узла не получаются друг из друга деформацией. Очень естественная идея, ввести некоторый **инвариант**, не изменяющийся при деформации.

Рассмотрим все раскраски узла в три цвета, причем каждую связную дугу рисунка (диаграммы) будем красить в один цвет. Например, у трилистника три дуги, то есть раскрасок в три цвета будет 3^3. При этом на каждом перекрестке сходятся дуги 1, 2 или 3 цветов.

Определение. Назовем раскраску *правильной*, если нет перекрестков, на которых сходятся дуги двух цветов. Иными словами, на каждом перекрестке сходятся либо одноцветные дуги, либо дуги 3 цветов (то есть все разного цвета).

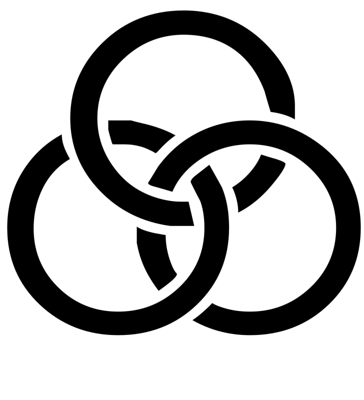
6. **Теорема.** Количество правильных раскрасок не изменяется при деформации узла, то есть является инвариантом.

Теперь у нас есть инвариант, который умеет отличать некоторые узлы: если инварианты у узлов разные, то и узлы не изотопны. Однако в обратную сторону это неверно — например, у узла в виде «восьмерки» столько же раскрасок, сколько у тривиального, однако они не изотопны.

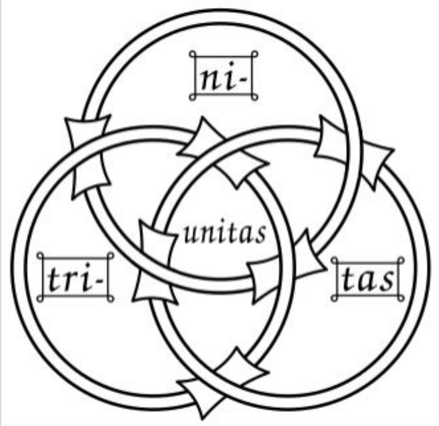
Но попытаемся пожинать хотя бы какие-нибудь плоды.

7. Докажите, что трилистник не изотопен тривиальному узлу.

8. Докажите, что кольца Борромео нельзя расцепить.
Конечно, кольца Борромео это не узел. Тела, образованные из нескольких веревок, у каждой из которых соединены концы, называются зацеплениями.



Небольшой исторический факт. Название «кольца Борромео» появилось из-за их использования на гербе семьи Борромео в северной Италии. Однако они появлялись в религии и искусстве и раньше - в основном, чтобы показать силу единства. Обратите внимание, что если убрать одно из колец, остальные кольца окажутся незакреплены. Однако, как вы уже доказали выше, разъединить кольца Борромео, не разрезая других колец, нельзя.



Кольца Борромео как символ христианской Троицы в фрацузкой рукописи XIII века

9. Докажите, что если у человека из первой задаче на руке были часы, он расцепить пальцы не сможет (тут есть картинка, но она спойлер к 1 задаче)

Вернемся к математике и попытаемся ответить на еще один вопрос — а сколько их, разных узлов?

10. Докажите, что есть узел, который не изотопен трилистнику и тривиальному узлу.

11. Существует ли узел, у которого количество правильных раскрасок равно 6?

12. Докажите, что существует бесконечно много попарно нетривиальных узлов.