Ортоцентр

Замечание. Отсюда и до черты у нас следующая картинка. Дан треугольник ABC, H — его ортоцентр, O — центр описанной окружности, H_A, H_B, H_C — основания высот, M_A, M_B,M_C — середины сторон.

1. Докажите, что $\angle ABO = \angle HBC$, выведите отсюда, что $BO \perp H_AH_C$.

2. **(а)** Докажите, что точка, симметричная ортоцентру H относителльно AC, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

(б) Докажите, что точка, симметричная ортоцентру относительно M_B, лежит на описанной окружности треугольника ABC, причем является диаметрально противоположной точке B.

(в) Выведите из предыдущего пункта, что $BH = 2OM_B$.

3. **(а)** Докажите, что точки $H_A, H_B, H_C, M_A, M_B, M_C$ и середины отрезков AH, BH, CH лежат на одной окружности. Такая окружность называется *окружностью девяти точек* или *окружностью Эйлера*.

(б) Докажите, что O, H, центр окружности девяти точек и точка пересечения медиан лежат на одной прямой. Эта прямая назыается *прямой Эйлера*. Как связаны между собой расстояния между этими четырьмя точками?

---

4. Диагонали выпуклого вписанного четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середину сторон AB проведена прямая, перпендикулярная противоположной стороне CD. Докажите, что эта прямая проходит через точку пересечения диагоналей.

5. В треугольнике ABC точка H_1, симметрична ортоцентру H относительно вершины C, а точка C_1 симметрична C относительно середины стороны AB. Докажите, что центр O окружности, описанной около треугольника ABC, является серединой отрезка H_1C_1.

6. Прямая Эйлера треугольника ABC пересекает прямые AB и AC в точках P и Q так, что $AP = AQ$. Найдите угол A.

7. Отрезок AD — диаметр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Через точку пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне BC, которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC.

8. Докажите, что если прямая Эйлера проходит через центр вписанной окружности треугольника, то треугольник равнобедренный.

9. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность; L — точка её пересечения с высотой, опущенной на сторону BC, H — ортоцентр треугольника. Докажите, что площадь треугольника BLC есть среднее геометрическое площадей треугольников ABC и BHC.

10. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE, CF и BN. M — середина AC. Лучи AC и EF пересекаются в точке D. Докажите, что $\dfrac{AN}{MN} = \dfrac{ND}{NC}$.