Квадратный трехчлен

Теорема Виета помогает

Для $f(x) = ax^2 + bx + c$, с корнями x_1 и x_2 верно $-b/a = x_1 + x_2, c/a = x_1 \cdot x_2$.

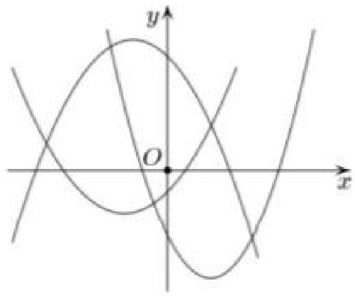
1. Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ в 666 раз больше корней квадратного уравнения $cx^2+dx+a=0$. Докажите, что $d^2=b^2$.

2. Алёша написал на доске пять целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, -5. Восстановите стёртое число.

Картинка помогает

Например, многие алгебраические выражения можно найти на графике. А иногда просто полезно представлять, как именно ваши параболы расположены.

3. На рисунке изображены графики трёх квадратных трёхчленов. Можно ли подобрать такие числа a, b и c, чтобы это были графики трёхчленов ax^2+bx+c, bx^2+cx+a и cx^2+ax+b?



4. Существуют ли такие три квадратных трёхчлена, что каждый из них имеет хотя бы один корень, а сумма любых двух из них корней не имеет?

Количество корней и знаки трехчлена связаны.

Если ax^2+bx+c не имеет корней, он везде имеет постоянный знак, равный знаку a. Если нашлись две точки, значения в которых отличаются по знаку, трехчлен имеет два корня.

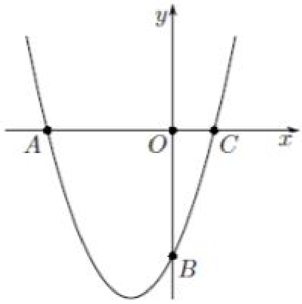
5. Известно, что сумма любых двух из трёх квадратных трёхчленов x^2+ax+b, x^2+cx+d, x^2+ex+f не имеет корней. Может ли сумма всех этих трёхчленов иметь корни?

Разнобой

6. Найдите все целые n, что $x^2-nx+n=0$ имеет целый корень.

7. Пусть a и b — положительные числа. Известно, что сумма минимального значения квадратного трехчлена ax^2+8x+b и минимального значения квадратного трехчлена bx^2+8x+a равна нулю. Докажите, что оба этих минимальных значения равны нулю.

8. На рисунке изображён график функции $y = x^2 + ax + b$. Известно, что прямая AB перпендикулярна прямой $y = x$. Найдите длину отрезка OC.



9. Три квадратных трехчлена $f(x), g(x), h(x)$ с положительными старшими коэффициентами таковы, что сумма любых двух из них имеет общий корень с оставшимся. Докажите, что все они имеют общий корень.

10. Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c$ удовлетворяют равенству

$$444a + 444b + 1798c = 0.$$

Докажите, что данное уравнение имеет корень на отрезке $[0, 1]$.

11. Числа a, b, c таковы, что для любого числа x верно

$$ax^2 + bx + c \geqslant bx^2 + cx + a \geqslant cx^2 + ax + b$$

Покажите, что $a = b = c$.

12. Про квадратные трехчлены f_1, f_2, f_3 с разными старшими коэффициентами известно, что их разности $f_1 - f_2, f_2 - f_3$ и $f_3 - f_1$ имеют по одному корню. Докажите, что корни разностей совпадают.

13. Найдите все квадратные трехчлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $2x^2 + 2x + 2 \geqslant P(x) \geqslant x^2 + x + 1$.

14. Известно, что $f(x), g(x)$ и $h(x)$ — квадратные трёхчлены. Может ли уравнение $f(g(h(x))) = 0$ иметь корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

15. Верно ли, что для любых трёх различных натуральных чисел a, b и c найдётся квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения a^3, b^3 и c^3?

16. При каком наименьшем n существуют такие $a_1, \ldots a_n$, что трехчлен

$$x^2 - 2(a_1 + \ldots + a_n)x + (a_1^4 + \ldots + a_n^4 + 1)$$

имеет хотя бы один целый корень?