

Гомотетия

1. Через точку касания двух окружностей проведены две произвольные прямые, пересекающие эти окружности вторично в точках A, B и C, D , причем точки A и B лежат на одной окружности, точки C и D — на другой. Докажите, что $AB \parallel CD$.
2. Две окружности касаются внутренним образом в точке A . Секущая пересекает окружности в точках M, N, P, Q (в таком порядке). Докажите, что $\angle MAP = \angle NAQ$.
3. (а) Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны трапеции, лежат на одной прямой.
(б) На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.
4. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке N , а невписанная — в точке M . Прямая BM пересекает вписанную окружность в точках X и Y . Докажите, что либо NX , либо NY является диаметром вписанной окружности треугольника.
5. **Лемма Архимеда.** Окружность ω касается отрезок BC в точке D , а также касается внутренним образом в точке A описанную окружность треугольника ABC . Докажите, что прямая AD делит дугу BC описанной окружности треугольника ABC (не содержащую точку A) пополам.
6. На плоскости проведены параллельные прямые l_1 и l_2 . Окружности ω_1 и ω_2 лежат между этими прямыми. Окружность ω_1 касается l_1 в точке A , окружность ω_2 касается l_2 в точке B , окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга в точке C . Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой.
7. Пусть точка I — центр вписанной окружности, а M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Точки M_a, M_b, M_c — точки пересечения медиан треугольников BIC, CIA, AIB соответственно. Докажите, что M — центр вписанной окружности треугольника $M_a M_b M_c$.
8. Три равные окружности ω_A, ω_B и ω_C проходят через точку X и вписаны соответственно в углы A, B и C треугольника ABC . Вторую точку пересечения окружностей ω_A и ω_B обозначим через C_1 . Аналогично определяются точки A_1 и B_1 . Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.