

Чередующиеся пути

Определение. Паросочетанием в графе называется множество ребер, не имеющих общих вершин.

Определение. Паросочетание **максимальное**, если оно не содержится ни в каком другом паросочетании (максимальное «по включению»).

Определение. Путь, в котором ребра по очереди принадлежат и не принадлежат нашему паросочетанию, называется **чередующимся**. Если обе вершины на его концах не принадлежат паросочетанию, он называется **дополняющим**.

Ребро, не пересекающееся по вершинам с нашим паросочетанием, тоже дополняющий путь!

- (а) Покажите, что для максимального паросочетания не существует дополняющих путей.

(б) Пусть M_1 и M_2 — два паросочетания, причем в M_2 ребер больше. Покажите, что тогда для M_1 найдется дополняющий путь.

(в) (С. Berge, 1957.) Покажите, паросочетание максимально тогда и только тогда, когда для него не существует дополняющих путей.
- 100 человек устраиваются работать на 100 различных вакантных мест. Каждый из двух агентов по трудоустройству предложил каждому из этих 100 человек одно определенное место, причем разным людям - разные места. Каждый из 100 претендентов принял одно из двух предложений, и оказалось, что все места заполнены. Докажите, что если бы каждый принял другое предложение, все места тоже оказались бы заполненными.
- Лемма Холла.**
Есть несколько юношей и девушек. Докажите, что все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых тогда и только тогда, когда для любого k любые k юношей знают в сопокупности не менее k девушек.
- Дан граф с mn ребрами ребра которого раскрашены в n цветов, причем ни какая вершина не имеет два ребра одинакового цвета. Докажите, что можно перекрасить эти ребра так, что ребер всех цветов станет поровну и по-прежнему ни от какой вершины не отходит два ребра одного цвета.
- Зритель пишет на доске слева направо 10 цифр. Помощник фокусника закрывает одну из цифр карточкой. После этого входит фокусник и называет закрытую цифру. Докажите, что такой фокус действительно возможен.