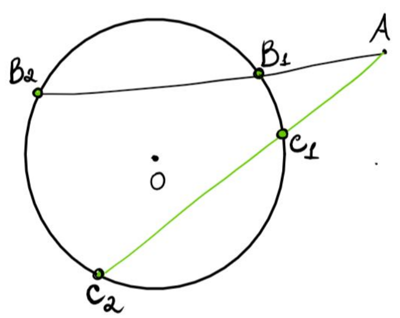
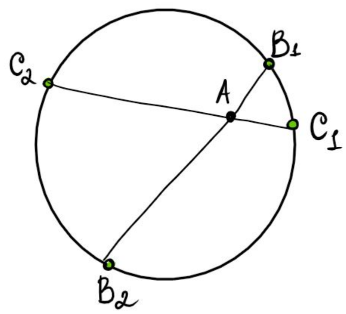
Степень точки. Самое начало.

1. Через точку A, не лежащей на окружности ω проведена прямая, пересекающая окружность в двух точках B_1 и B_2. Покажите, что $AB_1 \cdot AB_2$ не зависит от выбора секущей.

2. Покажите, что $AB_1 \cdot AB_2$ из предыдущей задачи равно и квадрату отрезка касательной из точки A (то есть докажите задачу для вырожденного случая).

3. Через точку A проведены две прямые, на которых выбраны точки B_1, B_2, C_1, C_2 как показано на рисунках. Известно, что $AB_1 \cdot AB_2 = AC_1 \cdot AC_2$. Докажите, что B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.
Иногда это полезный способ доказывать вписанность четырехугольника!





4. Пусть окружность ω из 1 задачи имеет центр O и радиус R.
(а) Покажите, что если точка A лежит **вне** окружности, то $AB_1 \cdot AB_2 = AO^2 - R^2$;
(б) Покажите, что если точка A лежит **внутри** окружности, то $-AB_1 \cdot AB_2 = AO^2 - R^2$;

Выражение $AO^2 - R^2$ называется степенью точки A относительно окружности ω и отлично считается через отрезки секущих.

5. Точка P удалена на расстояние, равное 7, от центра окружности, радиус которой равен 11. Через точку P проведена хорда, равная 18. Найдите отрезки, на которые делится хорда точкой P?

6. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.

7. Две окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая AB делит пополам отрезок общей внешней касательной к окружностям.

8. В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках A и B, а другая в точках C и D (точки A и D лежат на разных лучах угла). Докажите, что прямая AD высекает на этих окружностях равные хорды.

9. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD; M — такая точка диагонали AC, что четырёхугольник $BCDM$ вписанный. Докажите, что прямая

BD является общей касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM.