

Направленные углы

Полезно: $\angle(a, b) = -\angle(b, a)$.

Полезно: $\angle(a, b) + \angle(b, c) = \angle(a, c)$.

Полезно: $a \parallel b \Leftrightarrow \angle(a, b) = 0$.

Полезно: A, B, C, D лежат на одной окружности или прямой тогда и только тогда, когда

$$\angle(AC, CB) = \angle(AD, DB).$$

1. Две окружности пересекаются в точках M и K . Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C , вторую в точках B и D . Докажите, что $AC \parallel BD$.
2. Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, AC, AB соответственно, то описанные окружности треугольников $A_1BC_1, A_1CB_1, B_1AC_1$ имеют общую точку.
3. Четыре окружности пересекают друг друга по циклу (т.е. первая вторую, вторая третью, третья четвёртую, четвёртая первую) в четырёх парах точек. Известно, из этих четырёх пар можно выбрать по одной паре точек, так чтобы они лежали на одной окружности или прямой. Докажите, что оставшиеся четыре точки тоже лежат на одной окружности или прямой.
4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы пар углов A и B, B и C, C и D, D и A пересекаются в различных точках K, L, M, N соответственно. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.
5. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Некоторая окружность проходит через точки A и O и вторично пересекает прямые AB, AC в точках B_1, C_1 соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника B_1OC_1 лежит на прямой BC .
6. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке S . Окружность ω проходит через точки S и D и пересекает стороны AD и CD в точках M и N соответственно. Прямые SM и AB пересекаются в точке P , а прямые SN и BC — в точке R . Точки P и R лежат с той же стороны от прямой BD , что и точка A . Докажите, что прямая, проходящая через D параллельно AC , и прямая, проходящая через S параллельно PR , пересекаются на окружности ω .