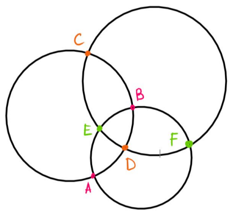
Радикальные оси

Определение. *Радикальной осью* двух окружностей называется ГМТ, для которых степени относительно двух данных окружностей равны.

Факт. Для двух неконцетрических окружностей радикальная ось — это прямая, причем эта прямая перпендикулярна линии центров данных окружностей.

1. **Еще один ОЧЕНЬ ВАЖНЫЙ факт.** Докажите, что радикальные оси окружностей, имеющих разные центры, либо пересекаются в одной точке, либо параллельны друг другу.
Вспомните, как вы доказывали другие пересечения прямых-гмт: биссектрис, серперов...

2. Докажите, что прямые AB, CD, EF на рисунке пересекаются в одной точке.



3. Даны две непересекающиеся окружности. К ним провели четыре их общие касательные. Докажите, что их середины лежат на одной прямой.

4. На стороне AB прямоугольного треугольника $ABC(\angle B = 90)$ выбрана точка C'. Точка B' – проекция C' на AC. BB' и CC' пересекаются в точке O. Докажите, что описанные окружности треугольников $BC'O$ и $OB'C$ вторично пересекаются на прямой AO.

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N. Докажите, что если вершины A и C некоторого прямоугольника $ABCD$ лежат на окружности ω_1, а вершины B и D — на окружности ω_2, то точка пересечения диагоналей прямоугольника лежит на прямой MN.

6. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны пары точек $(X;Y)$, $(Z;T)$ и $(U;V)$ соответственно. Оказалось, что четырехугольники $XYZT$, $ZTVU$ и $XYVU$ вписанные. Докажите, что шестиугольник $XYZTUV$ тоже вписанный.

7. Дана неравнобедренная трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.