

Счёт в дугах

Важная задача

(а) Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке S . Докажите, что угол ASB равен полусумме «меньших» дуг AB и CD .

(б) В этой же картинке лучи AB и DC пересекаются в точке P . Докажите, что угол $\angle APD$ равен полуразности «меньших» дуг AD и BC .

1. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Найдите $\angle A + \angle C + \angle E$.
2. Докажите, что все углы, образованные сторонами и диагоналями правильного n -угольника, могут быть представлены как $\frac{180k}{n}$ для некоторого натурального k (для разных углов это k может быть разным).
3. **Лемма о Трезубце.** Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Биссектриса BI пересекает описанную окружность в точке W . Докажите, что $WI = WA = WC$.
4. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, X, Y, Z, T — середины дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $XZ \perp YT$.
5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, K — середина дуги AB , не содержащей точек C и D . Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB , DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.
6. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.

(а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC , то они являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$.

(б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника ABC , то они являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.
7. Шестиугольник $ABCDEF$ вписанный, причем $AB \parallel DE, BC \parallel EF$. Докажите, что $CD \parallel AF$.