

## Малая теорема Ферма

**Малая Теорема Ферма (МТФ).** Для любого простого  $p$  и целого числа  $a$ , не кратного  $p$ , верно  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

**Другая формулировка.** Для любого простого  $p$  и целого числа  $a$  верно  $a^p \equiv a \pmod{p}$ .

1. Пользуясь Малой Теоремой Ферма вычислите:
  - (а) остаток  $2^{72}$  при делении на 73;
  - (б) остаток  $37^{42}$  при делении на 41;
  - (в) остаток  $176^{400}$  при делении на 101;
  - (г) остаток от деления  $8^{900}$  на 29.
2.
  - (а) Докажите, что  $7^{120} - 1$  делится на 143;
  - (б) докажите, что  $444^{1000} - 1$  делится на 1001;
  - (в) докажите, что  $n^7 - n$  делится на 42 при любом целом  $n$ .
3. Пусть  $p > 2$  — простое число. Докажите, что  $7^p - 5^p - 2$  делится на  $6p$ .
4. Докажите, что если  $n$  не делится на 37, то либо  $n^{18} - 1$ , либо  $n^{18} + 1$  обязательно делится на 37.
5. Докажите, что если число  $a^{16} + b^{16} + c^{16} + d^{16} + e^{16}$  делится на 17, то оно делится и на  $17^{16}$ .
6. Найдите все такие простые числа  $p$ , что  $7^{p^2} - 1$  делится на  $p$ .