НОД и НОК

Важно. Пусть простое p входит в разложение чисел a и b в степенях m и n соответственно. Тогда p входит в НОД(a, b) в степени $\min(a, b)$, а в НОК(a, b) – в степени $\max(a, b)$.

Полезно. Если НОД$(a, b) = d$, то иногда помогает представить a и b в виде $a = md$, $b = nd$, при этом НОД$(m, n) = 1$.

1. Докажите, что НОД$(a, b) \cdot$ НОК $(a, b) = ab$.

Следствие. Пользуясь упомянутым представлением $a = md, b = nd$, где $d =$ НОД(a, b), можно также написать НОК$(a, b) = \frac{ab}{d} = mnd$.

2. Может ли для натуральных чисел $a, b\,(a > b)$ быть выполнено неравенство НОД$(a, b) > a - b$?

3. Петя посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Вася НОК всех чисел от 501 от 1000. Докажите, что у них получились одинаковые результаты.

4. Известно, что для натуральных чисел a и b НОД$(a, b) = 15$, НОК$(a, b) = 360$. Найдите все возможные значения a и b.

5. Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 - a \cdot$ НОД$(a, b) =$ НОК(a, b). Докажите, что b делится на НОД$(a, b)^2$.

6. Докажите, что если НОД$(a, b, c) = 1$, то НОД$(a, bc) =$ НОД$(a, b) \cdot$ НОД(a, c).

7. Для двух натуральных чисел m, n выполнено равенство НОД(m, n)+НОК$(m, n) = m + n$. Докажите, что одно из этих чисел делится на другое.

8. Натуральные числа a и b таковы, что $a^3 - b^4 = ab^2$. Докажите, что b является произведением трёх последовательных натуральных чисел.