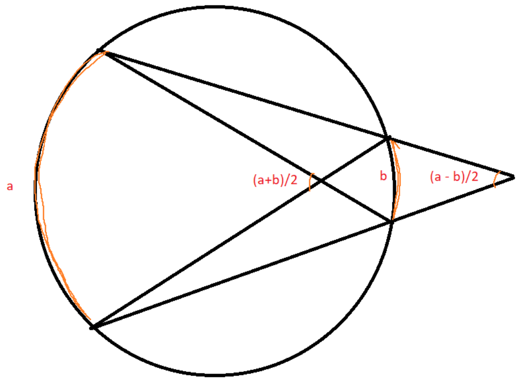
Счёт в дугах

Важная задача

(а) Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке S. Докажите, что угол ASB равен полусумме «меньших» дуг AB и CD.

(б) В этой же картинке лучи AB и DC пересекаются в точке P. Докажите, что угол $\angle APD$ равен полуразности «меньших» дуг AD и BC.



1. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, X, Y, Z, T — середины дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $XZ \perp YT$.

2. Биссектриса угла A треугольника ABC вторично пересекает описанную окружность в точке M, а биссектриса угла C — в точке N. Докажите, что прямая MN отсекает на сторонах AB и BC равные отрезки, считая от вершины B.

3. **Лемма о трезубце.** Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Биссектриса BI пересекает описанную окружность в точке W . Докажите, что $WI = WA = WC$.

4. Точки M и N — середины «меньших» дуг AB и BC описанной окружности треугольника ABC соответственно. Точка K — середина «большей» дуги AC. Отрезки AN и CM пересекаются в точке I. Докажите, что $KMIN$ — параллелограмм.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, K – середина дуги AB, не содержащей точек C и D. Пусть P и Q – точки пересечения пар хорд CK и AB, DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ вписанный.

6. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.
(а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC, то они являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$.
(б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника ABC, то они являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

7. Шестиугольник $ABCDEF$ вписанный, причём $AB||DE$, $BC||EF$. Докажите, что $CD||AF$.