Сравнение по модулю

Деление с остатком. Разделить целое число a на натуральное число b – значит найти такие целые числа q и r, что $a = bq + r$. При этом требуется выполнение неравенства $0 \leqslant r < b$. Числа q и r называются неполным частным и остатком при делении a на b.

Определение 1. Числа a и b называются сравнимыми по модулю n, если они дают одинаковые остатки при делении на n.

Определение 2. Числа a и b называются сравнимыми по модулю n, если их разность $a-b$ делится на n.

1. Докажите, что определения 1 и 2 эквиалентны.

2. **(а)** Если $a \equiv b\ (mod\ n)$, то $a + c \equiv b + c\ (mod\ n)$,
(б) Если $a \equiv b\ (mod\ n)$, то $ac \equiv bc\ (mod\ n)$,
(в) Если $a \equiv b\ (mod\ n)$, а $b \equiv c\ (mod\ n)$, то $a \equiv c\ (mod\ n)$,
(г) Если $a \equiv b\ (mod\ n)$, а $c \equiv d\ (mod\ n)$, то $a + c \equiv b + d\ (mod\ n)$,
(д) Если $a \equiv b\ (mod\ n)$, а $c \equiv d\ (mod\ n)$, то $ac \equiv bd\ (mod\ n)$,
(е*) Если $a \equiv b\ (mod\ n)$, то $a^k \equiv b^k\ (mod\ n)$.

3. Найдите остаток от деления
(а) 2^{100} на 3,;
(б) $696 \cdot 697 \cdot 698 \cdot 699$ на 70,
(в) $(-50)^{2021}$ на 9,
(г) $3^{2021} + 2^{2021}$ на 7,
(д) 7^{100} на 16,
(е) $(-7)^{100}$ на 16.

Полезный факт. Иногда в задачах полезно рассматривать остатки парами: a и $-a$.

4. Докажите, что $1^{45} + 2^{45} + ... + 38^{45}$ делится на 13.

5. **(а)** Делится ли число $2 \cdot 4 \cdot ... \cdot 102 + 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot 101$ на 103?
(б) Делится ли число $2 \cdot 4 \cdot ... \cdot 100 + 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot 99$ на 101?

Наблюдение. Чтобы доказать, что число составное, достаточно проверить, что его остаток при делении на какое-то маленькое число равен нулю.

6. Докажите, что число $5^{2021} + 5$ составное.

7. Докажите, что число $5^{2021} + 8$ составное.

8. Докажите, что число $5^{2020} + 12$ составное.