Вспоминаем сочетания

Количество способов выбрать k элементов из n элементов обозначается C_n^k и называется "числом сочетаний из n по k".
Задачи 1-3 предлагается решить без использования готовой формулы для числа сочетаний.

1. Чему равны C_n^0, C_n^n, C_n^1?

2. На плоскости проведено 10 прямых линий, из которых никакие две не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения имеют эти прямые?

3. В классе 20 учеников. Сколькими способами из них можно выбрать команду из 2 человек? 4 человек? 6 человек?

Формула для вычисления числа сочетаний: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

4. Труппа состоит из 10 артистов. Сколькими способами можно выбирать из нее в течение двух вечеров по 6 человек для участия в спектаклях так, чтобы эти составы не совпадали друг с другом?

5. На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 12 точек.

(а) Сколько существует четырехугольников с вершинами в этих точках?

(б) Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

6. Найдите количество точек пересечений диагоналей в n-угольнике, в котором никакие три диагонали не пересекаются в одной точке.

Свойства чисел сочетаний

7. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$

(а) с помощью формулы, **(б)** с помощью комбинаторных рассуждений.

8. Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

(а) с помощью формулы, **(б)** с помощью комбинаторных рассуждений.

9. Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$.

10. Докажите, что

(а) $C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + ... + C_n^k C_m^0$,

(б) $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2$.