

Разнойбой

1. Сколькими способами можно переставить буквы в слове BUENASUERTE?
2. На совет Элендила пришли эльфы и люди – всего 17 существ. Могло ли оказаться так, что каждый эльф знаком с 7-ю людьми, а каждый человек – с 5-ю эльфами?
3. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K так, что $AB = AK$. Отрезок AK пересекает биссектрису CL в её середине — точке P . Найдите острые углы треугольника ABC .
4. Докажите, что число $4^{2021} + 13$ составное.
5. Коэффициенты квадратного трёхчлена $x^2 + bx + c$ являются степенями двойки, а корни этого трёхчлена целые. Докажите, что корни совпадают.
6. Докажите, что для любого целого n числа $24n + 19$ и $9n + 7$ взаимно просты.
7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Через середину G диагонали BD проведена прямая, параллельная диагонали AC , пересекающая сторону CD в точке H . Докажите, что отрезок AH делит площадь четырёхугольника $ABCD$ пополам.
8. Фродо закрасил в квадрате 12×12 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратах 2×2 одинаковое число закрашенных клеток и во всех полосках 1×3 одинаковое число закрашенных клеток. Докажите, что Фродо закрасил все клетки.
9. Для двух натуральных чисел m, n выполнено равенство $\text{НОД}(m, n) + \text{НОК}(m, n) = m + n$. Докажите, что одно из этих чисел делится на другое.
10. На доске 8×8 стоят 20 ладей и k фишек. Ладьи не бьют сквозь фишки. При каком наименьшем k ладьи могут не бить друг друга?