

Неравенства

Для любого числа x верно неравенство $x^2 \geq 0$.

$\frac{a+b}{2}$ — среднее арифметическое двух чисел. \sqrt{ab} — среднее геометрическое ($a, b \geq 0$).

Неравенство Коши (или неравенство о средних): $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, при $a, b \geq 0$

1. Докажите неравенства:

(а) $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$ при любых x, y

(б) $x + \frac{1}{x} \geq 2$ при $x \geq 0$

(в) $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ при любых x, y

(г) Докажите, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ при $x, y > 0$

(д) $1 + x \geq 2\sqrt{x}$ при $x \geq 0$

Свойства неравенств: Неравенства можно складывать и для положительных чисел перемножать.

Если $a > b$ и $c > d$, то $a + b > c + d$.

Если $a, b, c, d \geq 0$, $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$.

Пример. Докажите неравенство: $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2y + 2 \geq 0$.

Представим левую часть в виде $(x + y)^2 + (y + 1)^2$. Заметим, что $(x + y)^2 \geq 0$ и $(y + 1)^2 \geq 0$, сложив данные неравенства получаем требуемое.

2. Докажите неравенства:

(а) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2xz + 2yz$ при любых x, y, z

(б) $(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)(b^2 + c^2) \geq 8a^2b^2c^2$ при $a, b, c \geq 0$

(в) $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ при любых x, y

(г) $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + b + c$ при $a, b, c \geq 0$

(д) $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$ при $a, b, c \geq 0$

(е) $ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$ при $a, b, c \geq 0$

(ж) $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \geq \frac{xy+yz+xz}{3}$ при любых $x, y, z > 0$