Индукция. Инструкция

Предположим мы хотим доказать тождество $1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Что это значит?

На самом деле мы хотим доказать бесконечное множество утверждений:
$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$
$1+2=\frac{2\cdot(2+1)}{2}$
$1+2+3=\frac{3\cdot(3+1)}{2}$
...
$1+2+3+\ldots+1000=\frac{1000\cdot(1000+1)}{2}$
...
$1+2+3+\ldots+100000=\frac{100000\cdot(100000+1)}{2}$
...

Конечно, мы можем проверить каждое утверждение вручную, просто взять и посчитать. Но мы не можем посчитать бесконечное число равенств.

Чтобы не считать все эти утверждения воспользуемся *Методом математической индукции*.

Для начала докажем **Базу** индукции. Это утверждение для $n=1$ или $n=2$ или $n=3$ или какого-то другого n в зависимости от условия. В данном случае нам подойдет $n=1$. Его можно просто проверить:
$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$

Переход:Теперь предположим, что утверждение с номером k — верно. Оно выглядит следующим образом:

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2}. \qquad (1)$$

И попробуем доказать следующее утверждение с номером $k+1$

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}. \qquad (2)$$

Заменим в утверждении (2) часть, которая совпадает с частью утверждения (1). Получим следующее:

$$\frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}. \tag{3}$$

Осталось только раскрыть скобки и проверить верность равенства:

$$\frac{k^2+k}{2} + \frac{2k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2}. \tag{4}$$

Получили, что утверждение (2) — верное.

Теперь, чтобы доказать какое-нибудь из наших начальных утверждений, например, вот это:
$1 + 2 + 3 + ... + 1000 = \frac{1000 \cdot (1000+1)}{2}$

воспользуемся уже имеющимися.
Так как мы знаем, что из верности утверждения с номером k следует верность утверждения с номером $k+1$, то можем считать, что $k = 1$, а $k + 1 = 2$.
Утверждение для $k = 1$ мы проверяли вручную, это была **База**, значит по **Переходу** будет верно утверждение для $k + 1 = 2$.
Давайте теперь считать, что верно утверждение для $k = 2$ (мы это только что доказали), тогда по **Переходу** будет верно утверждение для $k + 1 = 3$.
Если считать, что верно утверждения для $k = 3$, то будет верно утверждение для $k+1 = 4$.
И таким образом мы можем дойти до утверждения с номером 1000 или 100000 или до утверждения с любым номером, а значит наше утверждение
$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.
Будет верно для любого n. Значит мы доказали тождество.

Докажите следующие тождества методом математической индукции.

1.

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$$

2.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

4.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

5.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}.$$