

Графы, подсчет ребер

1. В шахматной партии за победу в игре дают 2 очка, за ничью - 1 очко, за поражение - 0 очков. В школе иногда проводят турнир по шахматам, где некоторые ученики играют с некоторыми другими.
 - (а) Сколько очков суммарно получают два игрока за партию?
 - (б) Сколько прошло игр, если сумма очков всех участников равна 20?
 - (в) Известно, что у Бори 8 очков, у Миши - 2 очка, у Васи - 4 очка, у Пети - 1 очко, у Кати - 3 очка, а у всех остальных участников пока 0. Сколько всего партий прошло?
 - (г) В некотором турнире участвовали 10 человек, каждый сыграл с 5 другими вничью. Сколько партий прошло за турнир?
 - (д) Докажите, что сумма очков в турнире не зависит от того, с каким результатом оканчивались партии
 - (е) В другом турнире участвовали 20 человек. 3 из них сыграли с 5 другими, а остальные 17 - с 7 другими (как именно сыграли - неизвестно). Сколько всего прошло игр за турнир?
 - (ж) Может ли сумма очков всех участников турнира равняться 123?
 - (з) Может ли в турнире из 17 человек каждый сыграть ровно с 7 другими участниками?
 - (и) В некотором турнире каждый сыграл ровно с 7 участниками. Может ли быть так, что всего было проведено 2020 партий?
2. В классе 20 человек. Каждый дружит с 5 одноклассниками.
 - (а) На новый год все школьники отправили каждому своему другу по открытке. Сколько всего открыток было отправлено?
 - (б) В одной социальной сети у всех этих школьников есть аккаунт, где у каждого есть по диалогу с каждым из друзей. Сколько всего диалогов в этой соц.сети у класса?
 - (в) Один ребенок перевелся из класса, могут ли остальные подружиться так, что теперь у каждого будет по 7 друзей?
3. Во дворе стоят 10 берез и 6 фонарных столбов. Между ними натянуты бельевые веревки так, что к каждому столбу привязано 7 веревок, а к каждой березе - 5. Сколько во дворе бельевых веревок?
4. На пару пришло 13 человек. Может ли случиться так, что каждая девочка знакома ровно с тремя из присутствующих на паре мальчиков, а каждый мальчик ровно с пятью девочками?
5. Встретились несколько друзей. Каждый из них обменялся рукопожатием с каждым, кроме Лёши Шампунина, который, будучи не в духе, некоторым пожал руку, а некоторым - нет. Всего было сделано 197 рукопожатий. Сколько рукопожатий сделал Лёша?

6. На клетчатом листе закрасили 25 клеток. Может ли каждая из них иметь нечётное число закрашенных соседей?
7. На клетчатом листе закрашены несколько клеток так, что вместе они образуют две несвязные фигуры. Клетка А имеет 3 соседних (по стороне) закрашенных клетки, клетка Б - одну соседнюю по стороне закрашенную клетку, а все остальные клетки имеют или 2 или 4 закрашенных соседа. Докажите, что клетки А и Б находятся в одной фигуре.